

**Cours no 6**  
Le 9 mars 2012

# Mathématiques appliquées et numériques

Licence 3, Dpt Géosciences  
Année 2011-2012, 2e semestre

Présentation synthétique du cours

Janvier – Juin 2012

Cours donné en 3<sup>e</sup> année de  
Licence de Sciences de la planète Terre  
par Michael Ghil et Jean Roux  
TD par Mohamadou Diallo  
École normale supérieure, Paris

## Sixième cours

### Systèmes d'équations autonomes, linéaires et non linéaires ; points critiques et leur classification

#### 6.1 Systèmes d'équations linéaires

Soit le système d'équations différentielles linéaires autonome  $\dot{x} = Ax$  où  $A$  est une matrice  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $x$  est un vecteur inconnu de  $\mathbb{R}^n$ , on va considérer le problème de Cauchy en imposant une condition initiale  $x(0) = x_0$  à la solution au temps  $t_0 = 0$ . On rappelle (cours 5) que l'on est assuré de l'existence et de l'unicité de la solution d'un tel système linéaire. Notons que l'on ne s'adresse pas, dans ce chapitre, aux équations du type  $\dot{x} = A(t)x$ , ce qui justifie le mot *autonome* dans l'énoncé du cours, les coefficients de la matrice  $A$  sont indépendants du temps (donc autonomes par rapport au temps).

#### 6.2 Préliminaires, rappels et idées de base

L'équation  $\dot{x} = ax$ , dans le cas  $n = 1$  a pour solution exponentielle triviale la fonction  $x = Ce^{at}$  où  $C$  est une constante déterminée par la condition initiale ( $C = x_0$ ).

Cela suggère, dans le cas général  $\dot{x} = Ax$ , de chercher une solution du type  $x = e^{\lambda t}v$ , où  $\lambda$  est une constante inconnue et  $v$  est un vecteur inconnu dont les éléments sont des constantes. Substituons la fonction  $x = e^{\lambda t}v$  dans l'équation  $\dot{x} = Ax$ , comme  $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}v$ , il vient  $\lambda e^{\lambda t}v = A(e^{\lambda t}v)$  et puisque  $e^{\lambda t}$  est un scalaire on a

$$Av = \lambda v. \quad (6.2.1)$$

On est donc amené à considérer un problème aux valeurs propres (voir cours no 4).

Une condition nécessaire et suffisante de trouver  $v \neq 0$  solution de l'équation

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (6.2.2)$$

est

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (6.2.3)$$

C'est une équation polynomiale en  $\lambda$  à coefficients réels de degré  $n$  pouvant avoir des racines multiples et des racines complexes 2 à 2 conjuguées (si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est racine alors  $\bar{\lambda}$  est aussi racine).

**Exemple 1 :** Résolution de

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Les valeurs propres du système sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 3$  et les vecteurs correspondants sont  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . D'après ce qui précède,  $x = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $x = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont solutions du système  $\dot{x} = Ax$ . Si  $(x_1, x_2)^T$  sont les composantes de chacune de ces deux solutions, on vérifie que chaque vecteur  $(x_1, x_2)^T$  vérifie le système (6.2.4). Si ces solutions sont indépendantes, elles forment une base de l'espace (de dimension 2) des solutions et la solution générale est donnée par

$$x(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

de composantes  $x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$  et  $x_2(t) = -2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}$ .

Or on a le

**Corollaire 6.2.1.** *Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des valeurs propres de  $A$  telles que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors les solutions  $s_1 = e^{\lambda_1 t} v_1$  et  $s_2 = e^{\lambda_2 t} v_2$  sont des solutions linéairement indépendantes du système linéaire  $\dot{x} = Ax$ .*

**Preuve :** Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des valeurs propres telles que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  on sait (voir Théorème 4.1.1) que les vecteurs propres correspondants  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants. Les solutions  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont donc bien linéairement indépendantes.  $\square$

Le calcul des vecteurs propres peut être parfois un peu pénible, même s'il s'agit toujours de résoudre un système linéaire algébrique.

## 6.3 Cas des systèmes d'équations en dimension $n$

### 6.3.1 Définition de l'exponentielle matricielle

La solution  $e^{at}$  de l'équation  $\dot{x} = ax$  dans le cas  $n = 1$  suggère que le système  $\dot{x} = Ax$  où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a une solution de la forme  $x(t) = e^{tA}v$  où  $v$  est un vecteur inconnu dont les composantes sont des constantes. La fonction  $t \rightarrow e^{tA}$  est une exponentielle de matrice (attention à l'ordre des facteurs dans l'exposant de l'exponentielle,  $t$  est un scalaire et l'écriture  $At$  n'a aucun sens) qui est très "bizarre" a priori. Formellement (en s'inspirant du cas scalaire) on la définit par

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots, \quad (6.3.1)$$

On prouve (voir livre) que cette écriture a un sens et que  $\widehat{e^{tA}} = Ae^{tA}$ .

Alors on a  $\dot{x}(t) = \widehat{e^{tA}}v = Ae^{tA}v = Ax(t)$ , donc  $e^{tA}v$  est solution du système pour tout vecteur constant  $v$ . Nous avons donc directement un

résultat d'existence de la solution d'un tel système. L'unicité sera vu avec l'examen des propriétés de la fonction  $t \rightarrow e^{tA}$  au prochain paragraphe. Il est donc possible d'écrire la solution en termes de série infini. On pourrait penser que le problème de la recherche de la solution du problème est résolu. Mais la fonction  $e^{tA}$  est peu exploitable a priori car elle ne permet pas de répondre à certaines questions importantes, par exemple :

- Quand la solution  $e^{tA}v$  est-elle périodique ?
- Quand est-ce-que  $e^{tA}v \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  ?

C'est pourquoi nous chercherons ci-après à remplacer la matrice  $e^{tA}$  par une matrice dont les éléments ne sont plus des séries mais des fonctions simples, essentiellement des produits de polynômes par des exponentielles scalaires.

### 6.3.2 Quelques propriétés de l'exponentielle matricielle

**Propriété 1 :** Il est immédiat d'après (6.3.1) (avec  $A = I$ ) que  $e^{t\lambda I} = e^{t\lambda}I$ .

**Propriété 2 :** Si les matrices  $A$  et  $B$  commutent ( $AB = BA$ , on dit que le commutateur  $[A, B] = AB - BA$  est nul) alors  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ .

**Preuve :**  $e^{tA}e^{tB} = (I + tA + (t^2/2!)A^2 + \dots)(I + tB + (t^2/2!)B^2 + \dots)$  soit, en ne considérant que les facteurs de  $t^2$  (les termes en  $t^n$  s'étudiant de façon identique aux difficultés d'écriture près) et en les regroupant, on voit que le facteur de  $t^2$  s'écrit  $(A^2/2! + AB + B^2/2!)$ . On a donc :

$$e^{tA}e^{tB} = I + t(A + B) + \frac{t^2}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots ; \quad (6.3.2)$$

par ailleurs  $e^{t(A+B)} = I + t(A + B) + (t^2/2!)(A + B)^2 + \dots = I + t(A + B) + (t^2/2!)(A + B)(A + B) + \dots$  soit

$$e^{t(A+B)} = I + t(A + B) + \frac{t^2}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots \quad (6.3.3)$$

Comme les matrices  $A$  et  $B$  commutent les équations (6.3.2) et (6.3.3) sont égales, ce qui conclut.  $\square$

**Propriété 3 :** Posons alors  $B = -A$ , la propriété 2 (la matrice  $A$  commute avec la matrice  $-A$  !) permet d'écrire que  $e^{-tA}e^{tA} = e^{tA}e^{-tA} = e^{t(A-A)} = e^0 = I$ , les inverses à droite et à gauche de la matrice  $e^{tA}$  sont égaux, la matrice  $e^{tA}$  est inversible et on a la formule remarquable  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .

L'inverse de la matrice  $e^{tA}$  existe toujours (même si  $A$  n'est pas inversible) et est égale à  $e^{-tA}$ . D'où la

**Proposition 6.3.1.** *Pour toute matrice  $A$  la matrice  $e^{tA}$  est inversible et  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .*

*Conséquence* : La Proposition 6.3.1 permet de démontrer que toute solution est de la forme  $x(t) = e^{tA}x_0$  (voir livre).

**Propriété 4** : On a  $e^{tA} = e^{\lambda t I + t(A - \lambda I)} = e^{\lambda t I} e^{t(A - \lambda I)}$  quel que soit le scalaire  $\lambda$ .

**Preuve** : Évidente, d'après la propriété 2, car la matrice identité  $I$  commute avec toute matrice.  $\square$

### 6.3.3 Premières conséquences des propriétés de l'exponentielle sur le calcul de la solution du système $\dot{x} = Ax$

Comme on sait que toute solution s'écrit  $x = e^{tA}v$ , d'après les propriétés 1 et 4 il vient :

$$x(t) = e^{\lambda t} \left[ v + t(A - \lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2v + \dots \right], \quad (6.3.4)$$

ce qui exprime la solution pour tout  $\lambda$  et  $v$  (qui ne sont pas encore précisés). L'utilité de l'équation (6.3.4) est dans le choix de  $\lambda$  et  $v$  tels que la série de (6.3.4) devienne finie, donc "utilisable". *Maintenant on choisit*  $\lambda$  et  $v$  tels que  $(A - \lambda I)v = 0$  (nous avons déjà remarqué la nécessité de ce choix au Paragraphe 6.2). Soit donc  $\lambda_1$  une valeur propre simple et  $v_1$  un vecteur propre associé. Alors  $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$  ce qui entraîne que  $(A - \lambda_1 I)^2v_1 = (A - \lambda_1 I)[(A - \lambda_1 I)v_1] = 0, \dots, (A - \lambda_1 I)^n v_1 = 0$ .

Dès lors (6.3.4) se réduit à  $x(t) = e^{\lambda_1 t}v_1$ , que nous savons être une solution de  $\dot{x} = Ax$ .

Le cas d'une valeur propre multiple sera considéré au paragraphe 6.3.5.

### 6.3.4 Cas des valeurs propres complexes et des vecteurs propres associés

Comme la matrice  $A$  est supposée réelle les valeurs propres complexes apparaissent par paires complexes conjuguées (cours no 4). Ainsi si la matrice  $A$  a des valeurs propres  $\alpha \pm i\beta$  avec  $\beta \neq 0$ , les vecteurs propres associés sont  $u \pm iv$ . Il est facile de démontrer que les vecteurs  $w = u + iv$  et  $\bar{w} = u - iv$  sont linéairement indépendants.

La solution est donc

$$x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iv) + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}(u-iv). \quad (6.3.5)$$

Considérons la première solution  $x_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iv)$ , de la forme  $x_1(t) = \mu X(t) + \nu iY(t)$  où  $\mu$  et  $\nu$  sont des constantes réelles quelconques,  $X(t)$  et  $Y(t)$  des fonctions réelles. On démontre (voir livre) que  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont aussi des solutions indépendantes. Ce qui permet d'écrire la solution uniquement avec des termes réels, ce qui est souhaitable puisqu'on cherche toujours des solutions réelles.

La solution générale (6.3.5) s'exprime alors uniquement avec des termes réels (les noms des constantes sont formels, car elles sont définies par la condition initiale imposée à la solution) par :

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} (u \cos \beta t - v \sin \beta t) + C_2 e^{\alpha t} (u \sin \beta t + v \cos \beta t). \quad (6.3.6)$$

On constate que si  $\alpha = 0$  l'on a une solution périodique de période  $2\pi/\beta$ , ce que nous ne pouvons pas observer lorsque la solution s'exprimait sous la forme abstraite  $x = e^{tA}x_0$ .

### 6.3.5 Théorie générale

#### Cas où la matrice $A$ est diagonalisable

Alors il existe une matrice  $C$  régulière (invertible) telle que  $C^{-1}AC = D$ , où la matrice  $D$  est diagonale et constituée des valeurs propres de  $A$ .

Opérons le changement de variables  $x = Cy$  ( $\Leftrightarrow y = C^{-1}x$ ,  $y_0 = C^{-1}x_0$ ), alors  $\dot{x} = Ax \Leftrightarrow C\dot{y} = ACy \Leftrightarrow \dot{y} = C^{-1}ACy = Dy$ . À un changement de variable près le système est diagonal, nous avons donc une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice  $A$  qui sont immédiatement données par les éléments de la diagonale  $D$ .

Le spectre des valeurs propres se présente sous la forme  $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_l, \bar{\lambda}_l$ , les  $\mu_i$  étant réels et les  $\lambda_j$  complexes, avec  $k + 2l = n$  et elles peuvent ne pas être toutes distinctes. Toutes les solutions sont de la forme exponentielle, elles sont linéairement indépendantes, on a  $\dot{y} = Dy \Leftrightarrow y = e^{tD}y_0$ , avec :

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & e^{\mu_k t} & 0 & & \dots & 0 \\ & & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & e^{\bar{\lambda}_1 t} & & \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & e^{\lambda_l t} & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 & e^{\bar{\lambda}_l t} \end{pmatrix} \quad (6.3.7)$$

En effet, en utilisant (6.3.1) on vérifie aisément que la matrice  $e^{tD}$  est diagonale et qu'elle est définie par (6.3.7).

Finalement la solution du système  $\dot{x} = Ax$ , lorsque la matrice  $A$  est diagonalisable, est donnée, en revenant à l'inconnue de départ, par  $x(t) = C e^{tD} C^{-1} x_0$ .

Les couples de solutions associés à des valeurs propres imaginaires donnent des solutions périodiques réelles (voir Paragraphe 6.3.4), puisque la matrice  $C$  est constituée des vecteurs propres tels que, si à  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  on associe  $w_i$ , alors à  $\bar{\lambda}_i \in \mathbb{C}$  il est associé  $\bar{w}_i$ . Chaque bloc-diagonal du type

$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}t} \end{pmatrix}$  dans (6.3.7), peut s'écrire de façon équivalente sous la forme :  
 $e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$  si  $\lambda = \alpha + i\beta$ .

On met ainsi en évidence une solution générale qui peut être constituée de sommes de solutions périodiques de périodes différentes, on obtient ainsi éventuellement une solution que l'on appelle une solution *quasi-périodique*. De plus l'expression explicite des solutions sous la forme  $e^{\mu_i t}$  avec  $\mu_i \in \mathbb{R}$  permet évidemment de comprendre le comportement à l'infini des solutions. Ainsi on peut répondre aux deux questions posées à la fin du Paragraphe 6.3.1.

**N.B. :** On voit que  $e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$ .  $\square$

### Cas où la matrice $A$ est non diagonalisable

Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables, mais on peut toujours "au moins" réduire toute matrice  $A$  à sa *forme de Jordan*, qui est d'ailleurs diagonale si  $A$  est diagonalisable (Théorème 4.2.1 du cours no 4).

Se pose la question de savoir comment, dans le cas  $A$  non diagonalisable, calculer la matrice  $e^{tA} = I + tA + (t^2/2)A^2 + \dots + (t^p/p!)A^p + \dots$  ?

Comme on a  $A = CJC^{-1}$ ,  $A^2 = (CJC^{-1})(CJC^{-1}) = CJ^2C^{-1}, \dots, A^p = CJ^pC^{-1}$ , il vient immédiatement  $e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}$ .

Puisque  $J$  est une matrice bloc-diagonale, on a

$$J^p = \begin{pmatrix} J_1^p & & 0 \\ & J_2^p & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_r^p \end{pmatrix}. \quad (6.3.8)$$

On montre facilement que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix}. \quad (6.3.9)$$

Tout revient donc à calculer  $e^{tJ_i}$  pour  $1 \leq i \leq r$ ,

Tous calculs faits on montre que  $e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i} e^{tN_i}$ , où  $e^{tN_i}$  est la matrice donnée par (6.3.10) :

$$e^{tN_i} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3.10)$$

Enfin  $e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}$  et la solution est  $x(t) = e^{tA}x_0$  où  $x_0$  est la condition initiale.

**Exemple 2 :** Considérons en dimension 2 le système  $\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ , on a une valeur propre double (c'est la multiplicité algébrique) égale à un. On remarque que  $A$  est presque un bloc de Jordan au coefficient  $\alpha$  près :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I + \alpha N;$$

il n'est pas nécessaire ici, comme dans la théorie générale, d'exhiber une matrice  $C$  de passage. La solution du système est  $x(t) = e^{tA}x_0 = e^{t(I+\alpha N)} = e^t e^{\alpha t N} x_0$ .

Comme  $N^p = 0$  dès que  $p \geq 2$ ,

$$e^{\alpha t N} = I + t\alpha N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la solution s'écrit

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} e^t & \alpha t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} x_0. \quad (6.3.11)$$

## 6.4 Systèmes non linéaires d'EDO autonomes dans le plan

### 6.4.1 Le cas général

Nous arrivons maintenant à un point important du cours, à savoir l'étude des outils qui permettent de se pencher sur les comportements à long terme des systèmes d'équations qui régissent l'évolution de la planète et des êtres vivants qui l'habitent.

L'étude des comportements à long terme des équations d'évolution est un acquis relativement récent des mathématiques modernes. De la façon la plus générale possible, il s'agit de la théorie des *systèmes dynamiques*. Au-delà des EDO, cette théorie s'applique aux équations aux dérivées partielles, aux EDO à effet de retard, ainsi qu'aux EDO stochastiques et autres, sur lesquels nous ne pouvons pas nous étendre dans ce cours.

Nous commençons donc par la formulation générale d'un système non linéaire *autonome* :

$$\dot{X} = F(X). \quad (6.4.1)$$

Limitons-nous à la dimension  $n = 2$ , avec  $X = (x, y)^T$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (6.4.2)$$



Ce sont les équations qui régissent, par exemple, un écoulement stationnaire dans le plan : la particule qui occupe à l'instant  $t$  la position  $X(t)$  a la vitesse  $F = (f, g)^T$ . Les solutions de (6.4.2) sont les *lignes de courant* du champ de vitesse  $F = (f, g)^T$ , autrement dit la solution  $X(t) = (x(t), y(t))^T$  suit une courbe dont la tangente en  $X(t)$  est donnée par le vecteur  $(f, g)^T$ . Le plan de cet écoulement est aussi appelé *plan des phases*.

On suppose que  $F$  est Lipschitz,

$$\|F(X_1) - F(X_2)\| \leq L\|X_1 - X_2\|; \quad (6.4.3)$$

dans ce cas il ne peut y avoir d'intersection entre les trajectoires. Supposons, *a contrario*, qu'une telle intersection ait lieu en  $X_0$  ; c'est impossible car la lipschitzité garantit l'unicité locale de la solution dont la condition initiale est  $X_0 = (x_0, y_0)^T$  - cours no 5. C'est une propriété importante des systèmes d'EDO autonomes. En revanche il peut y avoir des orbites fermés et des *points singuliers*, dits aussi *points critiques*, vu leur importance dans l'organisation de l'écoulement dans le plan des phases.

En effet, cet écoulement est structuré par la présence de points critiques, points pour lesquels

$$f(x_c, y_c) = g(x_c, y_c) = 0.$$

Tout point  $p$  tel que  $F(p) \neq 0$  est, par contre, un point *régulier*. Les zéros de  $F$  sont des points fixes car, si  $X_c = (x_c, y_c)$  avec  $F(X_c) = 0$ , alors  $X(t) \equiv Cste = X_c$  pour tout  $t > 0$ .

Que se passe-t-il à proximité de ces points? Pour répondre à cette question on effectue un développement de Taylor. On pose  $x = x_c + \xi$ ,  $y = y_c + \eta$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{(x_c + \xi)} &= f(x_c + \xi, y_c + \eta) \\ \dot{(y_c + \eta)} &= g(x_c + \xi, y_c + \eta) \end{cases},$$

soit, en notant par  $f_x$  et  $f_y$  les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$ , avec les mêmes notations pour  $g$ ,

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= f(x_c, y_c) + \xi f_x(x_c, y_c) + \eta f_y(x_c, y_c) + O(\xi^2 + \eta^2) \\ \dot{\eta} &= g(x_c, y_c) + \xi g_x(x_c, y_c) + \eta g_y(x_c, y_c) + O(\xi^2 + \eta^2). \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Pour  $\xi$  et  $\eta$  suffisamment petits, comme  $f(x_c, y_c) = 0 = g(x_c, y_c)$  puisque l'on est à un point critique, en notant  $\Sigma = (\xi, \eta)^T$ , en posant la notation  $f_x^c = f_x(x_c, y_c)$  et les mêmes conventions pour  $f_y^c$ ,  $g_x^c$  et  $g_y^c$ , enfin en définissant la matrice jacobienne

$$J_c = \begin{pmatrix} f_x^c & f_y^c \\ g_x^c & g_y^c \end{pmatrix},$$

on peut écrire (6.4.4) sous la forme matricielle,

$$\dot{\Sigma} = J_c \Sigma. \quad (6.4.5)$$

Est-il licite de négliger les termes du second ordre dans (6.4.4) ? En d'autres termes le système linéarisé (6.4.5) donne-t-il un *portrait de phases* qualitativement localement correct autour du point fixe  $(x_c, y_c)$  ? Par portrait de phases on entend ici la structure spatiale des lignes de courant du système. La réponse est généralement affirmative, à l'exception des cas particuliers recensés ci-dessous :

(i) le spectre de  $J_c$  est constitué de 2 valeurs propres imaginaires pures correspondant à un *centre* ; (ii) ce spectre n'a qu'une valeur propre double avec une base de vecteurs propres de dimension 2, ce qui correspond à un *centre étoilé* ; ou, finalement, (iii) ce spectre a une valeur propre double associée à un espace propre de dimension 1, c'est-à-dire un *nœud dégénéré*.

Il s'ensuit que – si le système linéarisé prédit que l'origine  $\xi = 0 = \eta$  est un *nœud*, un *point-selle* (c'est-à-dire un *col*), ou une *spirale* (voir Paragraphes 6.5 et 6.7) –, alors le point fixe  $(x_c, y_c)$  du système d'origine est du même type. La preuve non triviale de ce résultat (Théorème de Hartman-Grobman) est tout à fait hors du programme de ce cours. Ces trois types de point fixes seront appelés *structurellement stables*, les cas exceptionnels mentionnés précédemment étant donc *structurellement instables* ; ces concepts seront précisés à la définition 6.6.1. Le comportement des solutions autour du point critique, fournit par la stabilité de ce point critique, est donné par le système linéaire (6.4.4) dans les cas structurellement stables mentionnés ci-dessus.

Il est donc souvent possible de classer les points critiques du système originel (6.4.2), par l'étude spectrale des systèmes linéarisés (6.4.4) autour des points fixes  $(f_c, g_c)$  du champ vectoriel  $(f(x, y), g(x, y))$ . Pour ce faire nous devons définir, de façon générale, les notions de stabilité d'un point critique.

### 6.4.2 Stabilité d'un point critique

Nous donnons ces définitions dans le cadre général du système (6.4.1) où l'on impose que la solution  $X$  du système satisfasse à la condition initiale  $X_0$ . Elles sont évidemment applicables au système linéarisé. La notation  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 6.4.1.** *Un point critique  $X_c$  est dit stable si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$  tel que  $\|X_0 - X_c\| < \delta(\epsilon) \implies \|X(t) - X_c\| < \epsilon$  pour tout  $t > 0$ .*

Cette définition est analogue à celle de la continuité uniforme de  $X$  en  $X_c$ , pour tout  $t > 0$ , par rapport à la condition initiale  $X_0$ .

**Définition 6.4.2.** *Le point critique  $X_c$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si, en outre,  $X(t) \rightarrow X_c$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  pour toute condition initiale  $X_0$  telle que  $\|X_0 - X_c\| < \delta$ .*

**Définition 6.4.3.** *Un point critique  $X_c$  non stable est instable.*

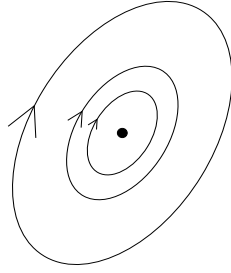


Figure 6.1: Le point critique est l'origine  $X_c = (0, 0)^T$ . Ce point critique est stable mais pas asymptotiquement stable.

On montre à la Figure 6.1 un cas où le point critique  $X_c$  est stable mais n'est pas asymptotiquement stable. Cet exemple est associé à une matrice jacobienne  $J_c$  du type

$$J_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

possédant une paire de valeurs propres imaginaires pures  $\pm i\omega$  ; les trajectoires dans les variables  $(\xi, \eta)$  sont des ellipses dans le plan de phase, Il est facile de vérifier que  $\omega^2 \xi^2 + \eta^2 = C$ , où  $C \geq 0$  est une constante. L'origine dans ces variables est alors désignée comme étant un *centre*. Par un changement de variables la matrice  $J_c$  peut se mettre sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces nouvelles variables les trajectoires sont des cercles ; le sens de rotation est le même et il est donné par le signe de  $b$ .

## 6.5 Points critiques de type nœud

Le point critique est toujours, dans le cas linéaire, l'origine  $X_c = (0, 0)$ . On note par  $X_0 = (x_0, y_0)$  la condition initiale du système. La notion de stabilité en cause ici est la stabilité asymptotique.

Si la matrice jacobienne est diagonalisable, on va faire un changement de base et dans la nouvelle base le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x, \\ \dot{y} &= \lambda_2 y. \end{aligned}$$

On s'intéresse dans cette section au cas où les valeurs propres sont réelles. Nous verrons, comme dans la Figure 6.11, qu'on se mettra dans le plan complexe, pour inclure le cas des foyers et centres de la Section 6.7.

### 6.5.1 Nœud stable

Le premier cas envisagé est celui de valeurs propres négatives et égales  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ . Dans ce cas la solution, illustrée à la Figure 6.2, est :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{\lambda t} \\y(t) &= y_0 e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

les deux composantes de la solution tendent vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

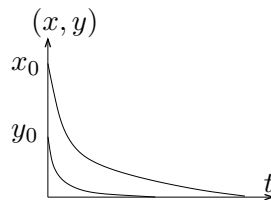


Figure 6.2: Les composantes  $x(t)$  et  $y(t)$  d'une solution du système linéarisé, avec deux valeurs propres négatives réelles égales.

On remarque facilement que

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0}.$$

C'est l'équation d'une droite dans l'espace des phases qui est ici un plan des phases. L'espace des phases d'un système d'équations différentielles est l'espace décrit par les variables du système du premier ordre associé. En partant du point initial on approche de l'origine en suivant une droite dans l'espace des phases, de plus en plus lentement. L'origine – c'est-à-dire, dans le cas linéaire, toujours le seul point critique –, est un nœud stable, ou encore un *point puits* ce que l'on peut voir à la Figure 6.3.

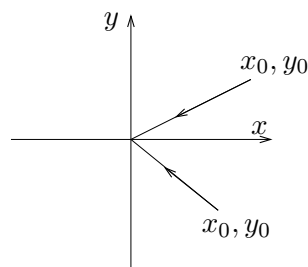


Figure 6.3: Deux solutions  $(x(t), y(t))$  du système linéarisé dans le plan des phases, avec deux valeurs propres négatives réelles égales. Les flèches – ici et dans les figures suivantes –, indiquent le sens dans lequel la solution parcourt sa trajectoire : l'origine est un nœud stable.

Si les valeurs propres sont différentes, mais toujours négatives, avec, par exemple,  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , en notant  $x_1 \equiv x$  et  $x_2 \equiv y$  le système s'écrit

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2.$$

En posant  $x_1^0 = x_0$  et  $x_2^0 = y_0$ , on a pour solution

$$x_i(t) = x_i^0 e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2,$$

qui tend toujours vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . L'origine est encore un nœud stable. La solution est illustrée à la Figure 6.4.

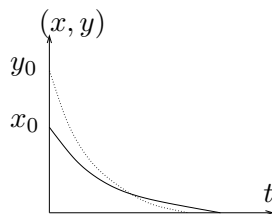


Figure 6.4: Les composantes  $x(t)$  (trait continu) et  $y(t)$  (tirets) d'une solution du système linéarisé avec deux valeurs propres négatives réelles différentes et deux conditions initiales positives.

Dans le plan des phases on a

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{x_2^0}{x_1^0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \frac{x_2^0}{x_1^0} e^{-\mu t}$$

avec  $\mu > 0$ . Le quotient des solutions tend donc vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . En prenant le logarithme des solutions on obtient

$$\begin{cases} \ln(x_1(t)) &= \ln(x_1^0) + \lambda_1 t, \\ \ln(x_2(t)) &= \ln(x_2^0) + \lambda_2 t, \end{cases}$$

ce qui donne finalement, en éliminant le temps  $t$  :

$$\frac{x_2(t)}{x_2^0} = \left( \frac{x_1(t)}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

C'est donc une fonction puissance dans le plan des phases, d'exposant  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ , que l'on peut voir à la Figure 6.5.

### 6.5.2 Nœud instable

Si les valeurs propres sont positives les solutions du système sont les mêmes qu'à l'alinéa précédent, mais divergentes :

$$x_i(t) = x_i^0 e^{\lambda_i t} \rightarrow \text{sgn}(x_i^0) \infty, \quad i = 1, 2, \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty.$$

Dans le plan des phases les figures sont les mêmes mais on s'éloigne du point critique (Figure 6.6). L'origine est un nœud instable, appelé également *point source*.

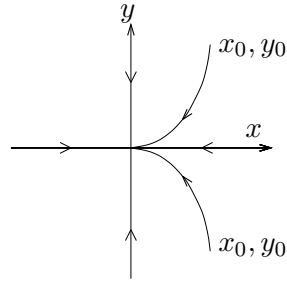


Figure 6.5: Deux solutions  $(x(t), y(t))$  du système linéarisé dans le plan des phases, avec deux valeurs propres négatives réelles différentes : l'origine est toujours un nœud stable.

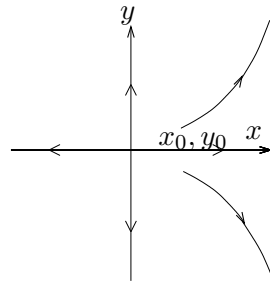


Figure 6.6: Deux solutions  $(x(t), y(t))$  du système linéarisé dans le plan des phases, avec deux valeurs propres positives réelles différentes : l'origine est un nœud instable.

### 6.5.3 Point col

Si les valeurs propres sont de signe différent,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , les solutions ont toujours la forme

$$x_i(t) = x_i^0 e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2.$$

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , la composante  $x_1(t)$  de la solution tend vers 0, pendant que  $x_2(t)$  tend vers  $\pm\infty$ , le signe dépendant du signe de  $x_2(0)$ , ce qui est montré à la Figure 6.7.

Dans le plan des phases ce sont des hyperboles (Figure 6.8). Ce type de point est instable, c'est un *point col*, ou encore un *point selle*.

Avant de définir d'autres types de points critiques, précisons comment ils organisent le portrait de phases des solutions d'un système dynamique.

## 6.6 Méthode générale d'étude des systèmes dynamiques

Les points critiques structurellement stables (voir définition 6.6.1) organisent l'espace des phases d'un système non linéaire autonome. Dans le voisinage de ces points critiques, les orbites sont approximées par le système linéarisé

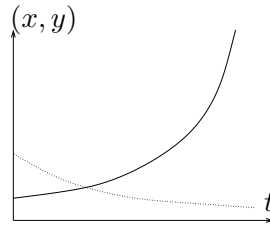


Figure 6.7: Les composantes  $x(t)$  (tirets) et  $y(t)$  (trait continu) d'une solution du système linéarisé dans le plan des phases, avec deux valeurs propres de signe différent.

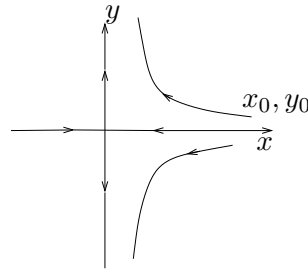


Figure 6.8: Deux solutions  $(x(t), y(t))$  du système linéarisé dans le plan des phases, avec deux valeurs propres réelles de signe différent : l'origine est un point col.

que l'on vient d'étudier ci-dessus. La Figure 6.9 montre un plan des phases organisé par les points critiques déjà étudiés.

Les points critiques qui ont été vus auparavant sont de plus structurellement stables.

**Définition 6.6.1.** *Un système dynamique (6.4.1) sujet à (6.4.3) est structurellement stable si, en rajoutant une perturbation lipschitzienne et suffisamment petite, le nouveau système*

$$\dot{X} = F(X) + \epsilon G(X)$$

*a le même portrait de phases. En particulier, les points critiques restent du même type.*

Le sens de "suffisamment petit" ci-dessus est, comme d'habitude, qu'il existe un  $\epsilon_0$  tel que la propriété annoncée tient pour des valeurs  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ .

Entre les points critiques il faut raccorder les orbites. En dimension  $n = 2$  les types de raccordements sont nombreux, ils ont été déterminés dès les années 30 par Andronov, Chaikin et Witt, suite aux travaux de Poincaré.

Ces considérations permettent de proposer une méthode d'étude des systèmes non linéaires autonomes :

1. trouver tout d'abord les points critiques, avec une méthode de Newton par exemple ;

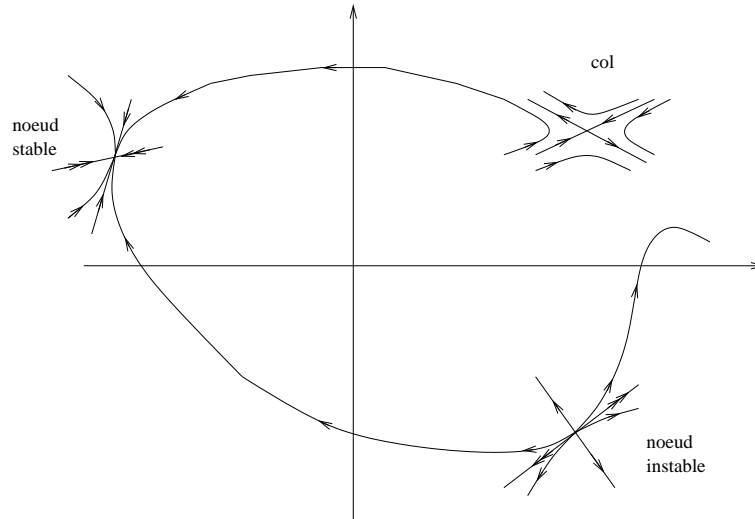


Figure 6.9: L'espace des phases d'un système bidimensionnel autonome non linéaire : un point col, un noeud instable et un noeud stable sont présents. Les supports des vecteurs propres sont figurés, les flèches donnent le signe des valeurs propres ; pour le cas des deux noeuds, 2 flèches correspondent à la valeur propre dont la valeur absolue est la plus élevée.

2. déterminer ensuite la stabilité des points critiques en trouvant les valeurs propres des systèmes linéaires associés ;
3. déterminer enfin, par des intégrations numériques, comment est organisé le reste de l'espace des phases, en utilisant des points de départ choisis stratégiquement.

## 6.7 Points critiques de type foyer

Nous avons vu précédemment le cas d'un système linéarisé pour lequel les valeurs propres de la matrice jacobienne sont réelles. C'est maintenant le cas de valeurs propres complexes qui est considéré.

Soit, dans notre cas de  $n = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et l'on cherche  $\lambda$  tel que

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Ceci revient à trouver les racines du polynôme

$$P_\lambda(A) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc,$$



ce qui donne

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Ce polynôme peut avoir deux racines complexes conjuguées, mais leur somme  $\text{tr}(A) = a + d$  est réelle. On les note  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  et  $\bar{\lambda} = \lambda_r - i\lambda_i$ , avec  $\lambda_r = (a + d)/2$ .

Le cas le plus simple correspond au système

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, \\ \dot{y} = -\omega x. \end{cases} \quad (6.7.1)$$

avec  $\omega \in \mathbb{R}$ .

La valeur propre  $\lambda$  est racine de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \omega \\ -\omega & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui donne des valeurs propres imaginaires pures  $\lambda = \pm i\omega$  - soit  $\lambda_r = 0$  et  $\lambda_i = \omega$ . Le point critique est un centre - voir paragraphe 6.4.1.

En multipliant par  $2x$  l'équation en  $\dot{x}$  du système (6.7.1) et par  $2y$  l'équation en  $\dot{y}$ , on obtient

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0,$$

ce qui donne  $r^2 = x^2 + y^2 = Cste$ . L'orbite de la solution est donc le cercle de rayon correspondant au point initial  $(x_0, y_0)$ , avec  $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ , il s'agit d'une pure rotation autour de l'origine. Le point critique, à savoir l'origine, est donc bien réellement un centre. La période est  $2\pi/\omega$ , indépendante donc de l'amplitude dans ce cas linéaire.

Le cas où l'orbite n'est pas circulaire correspond au système

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu x + \omega y \\ \dot{y} = -\omega x + \nu y. \end{cases} \quad (6.7.2)$$

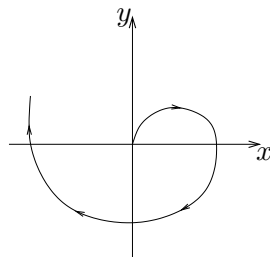


Figure 6.10: Une solution  $(x(t), y(t))$  du système linéarisé (6.7.1), avec des valeurs propres complexes de partie réelle positive : l'origine est un foyer instable.

Dans ce cas  $\lambda_r = \nu$  et  $\lambda_i = \omega$ . On peut écrire vectoriellement  $\vec{Z} = (x, y)^T$  et  $\dot{\vec{Z}} = A\vec{Z}$ . Et de façon similaire avec le cas réel, on a

$$\vec{Z}(t) = e^{At}\vec{Z}(0).$$

Dans ce cas des valeurs propres complexes apparaissent dans l'expression des exponentielles. Il y a toujours la partie en  $\omega$ , correspondant à un mouvement de rotation ; le signe de  $\omega$  détermine le sens de rotation, avec le sens trigonométrique pour  $\omega > 0$ . Il y a aussi une partie en  $e^{\nu t}$  : le signe de  $\nu$  détermine un mouvement spirale d'éloignement ( $\nu > 0$ ) ou de rapprochement ( $\nu < 0$ ) par rapport au centre. Il s'agit d'un *foyer instable*, comme dans la Figure 6.10, ou *stable*, respectivement.

La solution s'écrit explicitement dans le plan réel:

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{\nu t} \sin(\omega t), \\ y(t) &= y_0 e^{\nu t} \cos(\omega t). \end{cases}$$

La Figure 6.11 résume en dimension  $n = 2$ , avec l'origine comme point critique, tous les cas possibles de position dans le plan des valeurs propres du jacobien et les trajectoires associées. Le point de col et les foyers stable et instable sont structurellement stables ; les noeuds, stable et instable, avec valeurs propres égales, ainsi que le centre (ou vortex), à valeurs propres purement imaginaires, ne le sont pas.

Ce sont seulement les noeuds dont les valeurs propres sont inégales qui sont structurellement stables. La forme typique des trajectoires dans ce cas est illustrée, pour le cas stable, à la Figure 6.5 et, pour le cas instable, à la Figure 6.6.

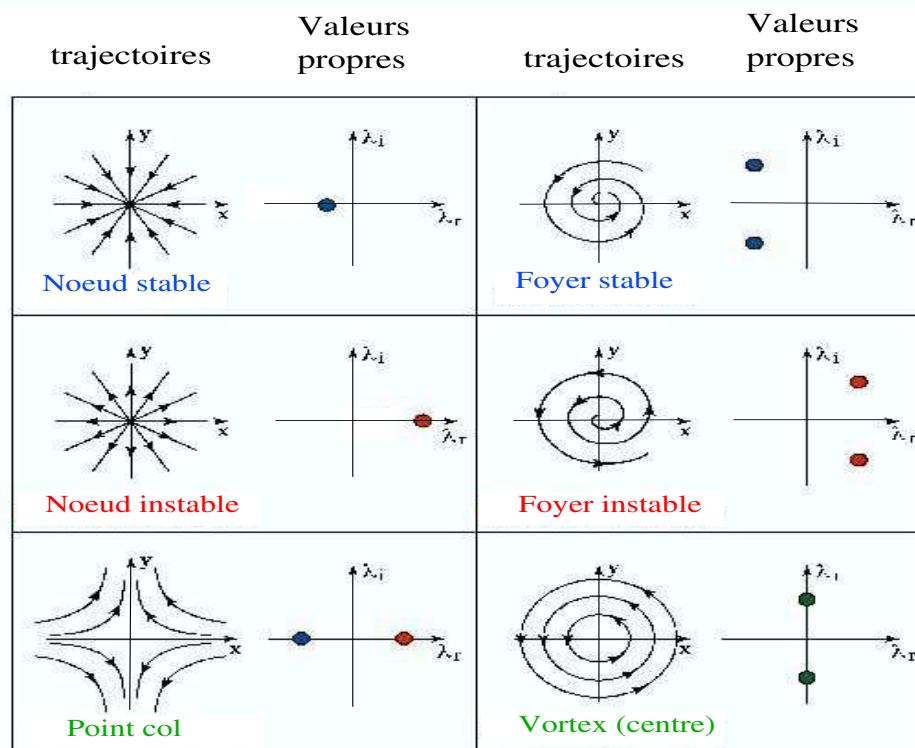


Figure 6.11: Trajectoires typiques pour 6 cas de points critiques. Les parties réelles  $\lambda_r$  et imaginaires  $\lambda_i$  des valeurs propres sont indiquées à droite des trajectoires.