

Cours no 5
Le 2 mars 2012

Mathématiques appliquées et numériques

**Licence 3, Dpt Géosciences
Année 2011-2012, 2e semestre**

Présentation synthétique du cours

Janvier – Juin 2012

Cours donné en 3^e année de
Licence de Sciences de la planète Terre
par Michael Ghil et Jean Roux
TD par Mohamadou Diallo
École normale supérieure, Paris

Cinquième cours

Équations différentielles vectorielles. Théorème fondamental d'existence et d'unicité. Introduction aux méthodes numériques de résolution.

Soit le système autonome à résoudre

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (5.0.1)$$

La distinction entre scalaire et vectorielle est un peu désuète. Dans une terminologie plus contemporaine on dit “équations différentielles en dimension 1 ou m ”. De même nous introduisons (sans la définir rigoureusement) la notion de champ de vecteurs en usage chez les dynamiciens afin de familiariser le lecteur avec le vocabulaire.

La question de l'existence et de l'unicité de la solution des équations différentielles peut toujours s'étudier sur les équations différentielles autonomes du type (5.0.1). En dimension un, dimension dans laquelle nous nous placerons généralement, on utilisera aussi la notation usuelle $\dot{x} = f(x)$. La notion centrale permettant de donner une réponse à cette question est celle de lipschitzité que nous allons développer.

5.1 Retour sur la notion de lipschitzité

Cette notion a déjà été vue au cours no 1. Étant donné son importance nous la reprécisons.

On suppose que le champ $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie une condition de Lipschitz globale sur tout \mathbb{R}^m , c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que, pour toute norme de \mathbb{R}^m (on pourra prendre, par exemple, la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m : on sait que toutes les normes sont équivalentes dans un espace de dimension finie, en particulier dans \mathbb{R}^m), on ait :

$$\|X(y) - X(z)\| \leq L\|y - z\|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \quad (5.1.1)$$

où la constante L est indépendante des y et z . On dit que X est globalement L -lipschitzien. Si $L < 1$ on dit que X est une *contraction* lipschitzienne.

Cette notion peut-être locale. Le champ X est localement L -lipschitzien dans un voisinage $V(y)$ de $y \in \mathbb{R}^m$ si on a $\|X(y) - X(z)\| \leq L\|y - z\|$, $\forall z \in V(y)$.

Une fonction lipschitzienne est continue, et même uniformément continue (si $\|y - z\| \leq \eta$ alors $\|f(y) - f(z)\| \leq \varepsilon$ pour $\eta \leq \varepsilon/L$).

Une fonction continue linéaire par morceaux (Figure 5.1), avec un nombre fini de morceaux, est lipschitzienne. Par exemple la fonction $f(x) = |x|$ non dérivable à l'origine est lipschitzienne. La propriété d'être lipschitzienne ne nécessite donc pas que la fonction f soit dérivable (cas $m = 1$) partout.

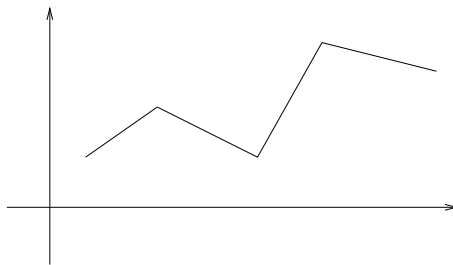


Figure 5.1: Exemple de fonction lipschitzienne non dérivable partout.

Remarque 5.1.1. *Cependant lorsque la dérivée existe sur un intervalle réel, il existe un critère simple assurant la lipschitzité d'une fonction f . Soit $m = 1$ pour simplifier, soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que la dérivée f' existe et est bornée sur $]a, b[$ (il suffit que la dérivée à droite existe et soit bornée sur $]a, b[$, ce qui est le cas de l'exemple de la Figure 5.1). Alors, par l'inégalité des accroissements finis, f satisfait une condition de Lipschitz sur $[a, b]$. À savoir que si $|f'(x)| \leq L$ pour tout $x \in]a, b[$, on a $|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$ quels que soient $y, z \in [a, b]$. Réciproquement si f est L -lipschitzienne, $|f(y) - f(z)|/|y - z|$ est majorée par L pour y et z distincts. Comme la limite de ce quotient existe lorsque $y \rightarrow z$, puisqu'on a supposé que $f'(y)$ existe pour tout $y \in]a, b[$, on en déduit que $|f'(y)| \leq L$. Sous les hypothèses de cette remarque, la condition $|f'(y)| \leq L$ est une condition nécessaire et suffisante de L -lipschitzité de f .*

Exemples simples de fonctions lipschitzienne ou non :

1. Soit $f(y) = y^2$, la fonction f a évidemment toute la régularité nécessaire. Pour tous y, z tels que $0 \leq y, z \leq 2$, on a :

$$|f(y) - f(z)| = |y^2 - z^2| = |y - z||y + z| \leq 4|y - z|,$$

f est donc localement lipschitzienne. Voyons-le en tenant compte de la Remarque 5.1.1. On a $f'(y) = 2y$ et $|f'(y)| \leq 4$ (indépendamment de y) dans la région considérée, ce qui conclut.

Plus généralement toute fonction continûment dérivable sur un intervalle fermé et borné (i.e. un compact de \mathbb{R}) est lipschitzienne. En effet sa dérivée est continue sur cet intervalle compact et elle est donc bornée. La fonction f est donc lipschitzienne d'après la remarque 5.1.1.

2. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1[$. En effet sa restriction à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1[$ est dérivable mais à dérivée non bornée, elle n'est donc pas lipschitzienne (voir remarque 5.1.1) : *a fortiori* la fonction f ne l'est pas non plus sur tout l'intervalle fermé $[0, 1]$. Par contre sur tout intervalle de \mathbb{R}^+ du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ la fonction f est lipschitzienne. Ceci montre

qu'une fonction continue n'est pas nécessairement lipschitzienne sur tout l'intervalle de définition de f , alors que la réciproque est vraie.

Pour montrer l'importance de l'hypothèse de lipschitzité donnons un exemple d'équation où, si cette hypothèse n'est pas assurée, l'unicité est fautive.

Exemple élémentaire de non-unicité locale d'une solution d'une équation différentielle. Soit alors l'équation $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ avec la condition initiale $x(0) = 0$. Cette équation a la solution évidente $x(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On vérifie aussi que la fonction $x(t) = t^2/4$ pour $t \geq 0$ et $x(t) = 0$ pour $t \leq 0$ est solution. Il n'y a pas d'unicité sur un intervalle contenant l'origine, bien que f soit continue. On sait aussi que la fonction \sqrt{x} n'est pas lipschitzienne dans un voisinage de l'origine. Ces observations laissent à penser qu'il peut y avoir un lien entre la lipschitzité et l'existence et l'unicité de la solution. Cet exemple permet aussi de voir que la continuité de f n'assure pas l'unicité de la solution de l'équation différentielle, en fait elle n'en assure que l'existence.

Il faut donc des conditions sur f (ou X) plus fortes que la continuité pour avoir l'existence et l'unicité locales de la solution. Si f est non autonome, la lipschitzité de f uniquement par rapport aux variables dépendantes, ou la lipschitzité de X (que l'on suppose toujours autonome - voir cours no 3), va suffire. La preuve utilise un théorème de point fixe, semblable au théorème 1.3.1 (cours no 1) qui assure l'existence et l'unicité de ce dernier.

5.2 Existence et unicité locales des trajectoires

5.2.1 Cas général des champs de vecteurs autonomes

Soit le problème $\dot{x} = X(x)$ où X est un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^m . Cet ouvert peut être tout \mathbb{R}^m .

Définition 5.2.1. Une trajectoire de X par $x \in U$ est une courbe dérivable $\varphi : I \rightarrow U$, définie sur un intervalle ouvert I contenant $0 \in \mathbb{R}$, telle que $\varphi(0) = x$ et que $\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t))$ pour tout $t \in I$.

Une telle trajectoire par x est souvent notée $\varphi(t, x)$.

Théorème 5.2.1. (Théorème de Cauchy d'existence et d'unicité locales des trajectoires dans le cas "Lipschitz")

Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|X(x) - X(y)\| \leq K\|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in U,$$

c'est-à-dire que l'application $x \rightarrow X(x)$ est Lipschitz de constante K . Alors

1. Existence locale des trajectoires

Soit $A \subset U$, un compact non vide. Alors il existe $\tau > 0$, dépendant de A , une fonction $\varphi : [-\tau, \tau] \times A \rightarrow U$, continue et dérivable par rapport à $t \in [-\tau, \tau]$, telle que pour tout $x \in A$, la courbe

$$\varphi(\cdot, x) : t \in]-\tau, \tau[\rightarrow \varphi(t, x) \in U$$

soit une trajectoire par x . Cela signifie que $\varphi(0, x) = x$ et que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = X(\varphi(t, x))$ pour tout $(t, x) \in [-\tau, \tau] \times A$.

2. Unicité locale des trajectoires

Soient $\varphi_1(\cdot, x) : I_1 \rightarrow U$ et $\varphi_2(\cdot, x) : I_2 \rightarrow U$ deux trajectoires par $x \in U$. Alors il existe un intervalle J de 0 , $J \subset I_1 \cap I_2$, tel que $\varphi_1|_J \equiv \varphi_2|_J$.

Preuve : Admise (voir livre : Théorème 7.6). \square

Remarque 5.2.1. Le Théorème 5.2.1 permet d'avoir immédiatement l'existence et l'unicité de la solution des systèmes linéaires $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice d'ordre m . En effet la condition de Lipschitz est trivialement vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ avec $L = \|A\|$ puisque, par définition de la norme matricielle, $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|$. Plus tard, dans le cours, on exhibera une expression explicite de la solution pour ces systèmes linéaires, montrant qu'elle existe et est unique quelque soit $t \in \mathbb{R}$. Il est heureux que le théorème général d'existence et d'unicité s'applique au moins pour les systèmes linéaires !

Remarque 5.2.2. Reprenons l'équation $\dot{x} = \sqrt{x}$ que nous avons étudiée à la fin du Paragraphe 5.1, on a vu qu'il existe deux solutions pour $t \geq 0$, à savoir $x(t) = 0$ et $x(t) = t^2/4$. On sait que $f(x) = \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a \geq \alpha > 0$. Or, par le Théorème 5.2.1, avec $U =]0, +\infty[$ et un compact $A \subset U$, on a l'existence et l'unicité locales de la trajectoire passant par un point $x_0 \in A$, c'est-à-dire pour $x_0 > 0$ (voir figure 7.11 du livre pour l'illustration de ces propriétés).

5.2.2 Application au cas des systèmes non autonomes

Dans ce qui suit la variable t est généralement le temps. Soit $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, un intervalle fermé borné de \mathbb{R} (T est supposé fini). Soit le système non-autonome d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & t \in I_0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, & y_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où f est une fonction non linéaire de $I_0 \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^m .

On a le

Théorème 5.2.2. *Supposons l'application $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$. La solution de (5.2.1) existe et est unique pour tout $t \in I_0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^m$, sous l'hypothèse de lipschitzité*

$$\|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \leq K\|y - z\|, \quad \text{pour tout } (t, y, z) \in I_0 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad (5.2.2)$$

où $K > 0$ est une constante indépendante du temps et des fonctions y et z .

Preuve : Admise (voir livre : Théorème 7.10). \square

Exemple d'existence non globale d'une solution Soit l'équation $\dot{x} = x^2$ défini sur \mathbb{R} . Cette équation différentielle a déjà été vue au Paragraphe 3.3.5 (cours *n°3*). La fonction $f(x, t) = x^2$ est *localement lipschitzienne* en $x \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être décidées par le théorème 5.2.2. Soit x_0 la condition initiale imposée à la solution pour $t = 0$; si $x_0 = 0$ alors la solution $\varphi(t)$ est une constante nulle (on voit que $\varphi(t) = 0$ est une solution de l'équation différentielle satisfaisant à la condition initiale $\varphi(0) = 0$ et c'est la seule par l'unicité). Supposons maintenant $x_0 \neq 0$; pour t voisin de 0, $x = \varphi(t)$ est non nulle par continuité de la solution et donc l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dx}{x^2} = dt,$$

d'où par intégration

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t.$$

On a donc la solution explicite

$$x(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}. \quad (5.2.3)$$

La solution est partout non nulle. Le Théorème 5.2.1 stipule l'existence de la solution sur un intervalle temporel $] -\tau, \tau[$ contenant 0 car $\tau > 0$. On constate qu'elle est définie partout sauf pour $t = 1/x_0$ car $x(t, x_0) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow 1/x_0$. Alors si $x_0 > 0$, on a que $I_{x_0} =] -\infty, 1/x_0[$ (on ne peut pas avoir alors $I_{x_0} =]1/x_0, \infty[$ car cet intervalle ne contient pas le temps initial $t = 0$). Ce qui justifie la figure 3.7 du cours *n°3* où $x(0) = x_0 = 1$. De manière analogue, $I_{x_0} =]1/x_0, \infty[$ si $x_0 < 0$.

5.3 Résolution numérique des équations différentielles : méthodes à un pas

On suppose l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, T fini. Si cet intervalle est connu, c'est sur celui-ci que l'on calcule éventuellement la solution.

5.4 Méthodes à un pas, idées de base

Remarquons que la solution du problème (5.2.1) vérifie l'équation intégrale :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I_0. \quad (5.4.1)$$

Évidemment, dans \mathbb{R}^m , cette équation est à lire composante par composante.

Quelle est l'idée des méthodes numériques de résolution ?

Étant donné une subdivision de l'intervalle I_0 , soit $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = t_0 + T$, on cherche à déterminer des valeurs approchées $y_0 < y_1 < \dots < y_n < \dots < y_N$ des valeurs $y(t_n)$ pour $n = 1, 2, \dots, N$ prises par la solution exacte $y(t)$ aux temps t_n . On notera les pas de temps successifs par

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

et par $h_{\max} = \max(h_n)$ le maximum des pas de temps.

N.B. : Rien n'interdit évidemment de prendre des pas tous égaux. \square

On appelle *méthode à un pas* une méthode permettant de calculer y_{n+1} à partir de la seule valeur antérieure y_n .

On appelle *méthode à r pas* une méthode qui nécessite, pour calculer y_{n+1} , la mémorisation des résultats obtenus aux étapes $n, n-1, \dots, n-r+1$.

Toutes ces méthodes utilisent l'équation (5.4.1) pour leur construction, mais l'utilisation de l'intégrale est très différente selon que l'on construit des méthodes à un pas ou à r pas.

5.4.1 Méthode d'Euler-Cauchy

Cette méthode est également dénommée *méthode d'Euler progressive*, ou *forward Euler method* en anglais.

Supposons donc y_n connue, comment calculer y_{n+1} ?

On remarque que, d'après (5.4.1) avec $t_0 = t_n$, on a :

$$y(t) = y(t_n) + \int_{t_n}^t f(s, y(s)) ds, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (5.4.2)$$

Calculons numériquement l'intégrale par la méthode dite des *rectangles à gauche* (voir cours *n°2*). On a :

$$\int_{t_n}^t f(s, y(s)) ds \approx (t - t_n) f(t_n, y(t_n)). \quad (5.4.3)$$

Cette intégration numérique (5.4.3) du terme intégrale de (5.4.2) implique

$$y(t) \approx y(t_n) + (t - t_n) f(t_n, y(t_n)), \quad (5.4.4)$$

qui est l'équation de la tangente à la courbe intégrale solution de (5.2.1) au point $(t_n, y(t_n))$. On pose alors, en supposant $y_n \approx y(t_n)$,

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad (5.4.5)$$

c'est la méthode d'*Euler-Cauchy*.

L'algorithme est le suivant : partant de la donnée initiale y_0 , on calcule y_n par récurrence en faisant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (5.4.6)$$

5.4.2 Définition de la convergence d'une méthode

Une question naturelle est de savoir si la solution calculée y_n par une méthode donnée, représente une "bonne" approximation de $y(t_n)$? C'est la question de la convergence. De manière plus précise, pour $0 \leq n \leq N$, on définit l'*erreur de discrétisation* par :

$$e_n = y(t_n) - y_n, \quad (5.4.7)$$

et la convergence par :

Définition 5.4.1. *On dit que la méthode est convergente si*

$$\lim_{h_{max} \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \| e_n \| = 0. \quad (5.4.8)$$

Cette définition suppose que l'on prenne, très naturellement, comme condition initiale y_0 du schéma, la condition initiale $y(t_0)$ de la solution exacte du problème (attention au fait que dans (5.2.1) on impose $y(t_0) = y_0$, ce ne sont pas, *stricto sensu*, les mêmes y_0).

La réponse à la question de la convergence est réglée par les notions d'erreur locale de troncature, de consistance et de stabilité que nous définirons, dans un cadre général au Paragraphe 5.5.1. Aux fins d'illustration, examinons d'emblée la notion d'erreur locale de troncature, et son estimation pour la méthode d'Euler-Cauchy qui, vu sa simplicité, est très facile à étudier.

5.4.3 Erreur locale de troncature

On dit aussi *erreur locale de consistance* ou même *erreur de cohérence*. Cette notion est attachée au schéma considéré. Elle est définie par l'erreur faite lorsque l'on remplace dans le schéma les y_n par les $y(t_n)$ où $y(t)$ est la solution exacte du problème. Pour la méthode d'Euler-Cauchy, pour $0 \leq n \leq N-1$ on définit donc la quantité

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n)). \quad (5.4.9)$$

On remarque (subtilement !) en effet que :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n f(t_n, y(t_n)) + \epsilon_n \quad (5.4.10)$$

sous cette forme on voit que la solution exacte vérifie le schéma d'Euler-Cauchy (5.4.6) de manière approchée à ϵ_n près. Cette quantité ϵ_n est appelée *erreur locale de troncature* pour la méthode d'Euler-Cauchy.

Estimons-la en utilisant une version plus élaborée de la formule de la moyenne vue au cours no 2.

Proposition 5.4.1. *Soit $\omega \geq 0$ une fonction intégrable sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$, c'est-à-dire supposons que l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} \omega(x) dx$ existe. Alors, pour toute fonction $f \in C^0([\alpha, \beta])$, il existe $\xi \in]\alpha, \beta[$ tel que*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\omega(x)dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} \omega(x)dx. \quad (5.4.11)$$

Supposons que y soit un peu plus régulière que C^1 , à savoir $y \in C^2(I_0 ; \mathbb{R}^m)$. Un développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction y entraîne que

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \dot{y}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) \ddot{y}(s) ds, \quad (5.4.12)$$

et puisque $\dot{y}(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ car $y(t)$ est la solution exacte du problème, il vient d'après (5.4.9) :

$$\epsilon_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) \ddot{y}(s) ds. \quad (5.4.13)$$

La Proposition 5.4.1, avec $\omega(s) = t_{n+1} - s$ (notons que $\omega(s) \geq 0$ pour $s \in [t_n, t_{n+1}]$), entraîne l'existence d'un θ_n tel que :

$$\epsilon_n = \frac{h_n^2}{2} \ddot{y}(\theta_n), \quad t_n < \theta_n < t_{n+1}. \quad (5.4.14)$$

Introduisons la notation usuelle suivante :

Notation de Landau : f est en $O(\varphi)$ – on dit que f est en “grand” O de φ –, s'il existe une fonction g telle que $f(x) = g(x)\varphi(x)$ où la fonction g est bornée.

L'erreur locale de troncature est donc en $O(h_n^2)$.

Remarque 5.4.1. *Nous définirons au Paragraphe 5.5.5 la notion d'ordre p quelconque d'une méthode. Nous verrons qu'une méthode est au moins d'ordre 1 si et seulement si elle est consistante. Ces deux notions de consistance et d'ordre sont évidemment différentes.*

5.4.4 Une deuxième méthode d'intégration à un pas

Soit toujours l'équation (5.4.2), on calcule maintenant l'intégrale par la méthode dite des "rectangles à droite" (voir cours no 2), tout aussi légitimes que ceux à gauche !, alors

$$\int_{t_n}^t f(s, y(s)) ds \approx (t - t_n) f(t_{n+1}, y(t_{n+1})). \quad (5.4.15)$$

Dès lors on obtient le schéma

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (5.4.16)$$

C'est la méthode d'*Euler implicite*, ou méthode d'Euler rétrograde (backward Euler method). Cette méthode présente des différences fondamentales (et un peu inattendues malgré une apparente similitude d'écriture), avec la méthode d'Euler-Cauchy explicite. Dans (5.4.16), y_{n+1} est donnée *implicitement* (c'est-à-dire non directement, non explicitement). À chaque pas de temps le calcul de y_{n+1} dans (5.4.16), ne peut se faire que par l'usage d'une méthode de résolution d'une équation non-linéaire dans \mathbb{R}^N du type Newton (voir cours no 1) ; cela s'avère beaucoup plus coûteux que le calcul direct de y_{n+1} dans (5.4.6) !

L'erreur de troncature pour le schéma d'Euler rétrograde est tout à fait semblable à celle du schéma d'Euler-Cauchy, elle est aussi en $O(h_n^2)$ (voir livre).

5.5 Méthodes à un pas, formulation générale

5.5.1 Formulation générale des méthodes à un pas

Nous définirons toutes les méthodes à un pas par :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n), \\ y_0 \quad \text{donné dans } \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (5.5.1)$$

où Φ est une fonction continue de $I_0 \times \mathbb{R}^m \times [0, h_0]$ dans \mathbb{R}^m qui ne dépend que de f .

Notons que pour la méthode d'Euler-Cauchy on a

$$\Phi(t_n, y_n; h_n) = f(t_n, y_n),$$

la fonction Φ est indépendante de h_n . En particulier, ce sera important pour la suite, $\Phi(t_n, y_n; 0) = f(t_n, y_n)$.

Remarque 5.5.1. Comme f est supposée continue en $(t, y)^T$ (voir le théorème d'existence et d'unicité), la continuité imposée à Φ est naturelle. La formulation proposée doit au moins être cohérente avec la méthode d'Euler-Cauchy qui est la plus simple.

Soit $y(t)$ la solution du problème (5.2.1). Remplaçons dans le schéma les y_n par les $y(t_n)$, pour $0 \leq n \leq N - 1$ on introduit ainsi la quantité

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n); h_n), \quad (5.5.2)$$

que l'on appelle (la notion a déjà été introduite pour des schémas particuliers à la section précédente) *l'erreur locale de troncature* (à l'instant t_n) de la méthode (5.5.1). Cette erreur dépend du Φ choisi.

On écrit (encore subtilement !) (5.5.2) sous la forme :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \Phi(t_n, y(t_n); h_n) + \epsilon_n, \quad (5.5.3)$$

qui montre que la solution exacte $y(t)$ apparait comme étant solution du schéma à un pas (5.5.1) perturbé. La quantité ϵ_n représente, en un certain sens, l'erreur que l'on fait, à l'instant t_n , en remplaçant l'équation différentielle par le schéma.

5.5.2 Définition de la consistance (globale)

On introduit la notion fondamentale suivante :

Définition 5.5.1. *La méthode (5.5.1) est consistante avec l'équation différentielle (5.2.1) si pour toute solution $y(t)$ de l'équation $\sum_{n=0}^{N-1} \|\epsilon_n\| \rightarrow 0$ lorsque $h_{\max} \rightarrow 0$.*

Cette définition signifie que la somme des mesures des erreurs locales de troncature est négligeable dès que h_{\max} est assez petit. À première vue c'est une propriété qui semble peu facile à vérifier, car il existe un conflit entre h_{\max} et N : lorsque $h_{\max} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ et la somme des erreurs peut augmenter indéfiniment a priori. La question est donc de savoir quel est le comportement prépondérant : $h_{\max} \rightarrow 0$ ou $N \rightarrow \infty$?

5.5.3 Définition de la stabilité

Une autre notion fondamentale est la suivante

Définition 5.5.2. *La méthode (5.5.1) est stable s'il existe une constante $M > 0$, indépendante de h_n , telle que pour toutes suites y_n, z_n et η_n vérifiant*

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n),$$

et le schéma perturbé suivant :

$$z_{n+1} = z_n + h_n \Phi(t_n, z_n; h_n) + \eta_n \quad (5.5.4)$$

on ait :

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - z_n\| \leq M(\|y_0 - z_0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \|\eta_n\|). \quad (5.5.5)$$

La constante M est dite la *constante de stabilité* du schéma.

Cette notion de stabilité implique qu'une "petite" perturbation sur les données n'entraîne qu'une "petite" perturbation sur la solution - ceci même lorsque $h_{\max} \rightarrow 0$ et qu'ainsi les erreurs d'arrondi s'accumulent indéfiniment -. En pratique, cette condition est absolument essentielle en raison justement des erreurs d'arrondi inhérents aux calculs sur ordinateur et qui perturbent inévitablement la méthode. Un schéma instable ne présenterait aucun intérêt pratique.

5.5.4 Théorème fondamental

Dès que la méthode est consistante et stable elle est convergente

Théorème 5.5.1. *Si une méthode est consistante et stable elle est convergente.*

Preuve : Elle est presque immédiate, il suffit d'écrire les définitions. Soient les notations précédentes. Posons dans (5.5.4), pour tout n , $z_n = y(t_n)$ et $\eta_n = \epsilon_n$. L'équation (5.5.4) devient l'écriture (5.5.3) de l'erreur locale de troncature pour tout temps t_n ! Si la méthode (5.5.1) est consistante on a $\sum_{n=0}^{N-1} \|\epsilon_n\| \rightarrow 0$ lorsque $h_{\max} \rightarrow 0$. Reprenons maintenant la Définition (5.4.7) de l'erreur e_n , il vient :

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\| = \max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \quad (5.5.6)$$

d'où, tenu compte de la définition de la stabilité par la relation (5.5.5),

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\| \leq M(\|y_0 - z_0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \|\epsilon_n\|). \quad (5.5.7)$$

Si $y_0 = y(t_0)$ - c'est toujours ce que l'on prend ! -, le terme de sommation tendant vers zéro lorsque $h_{\max} \rightarrow 0$ par la définition de la consistance, le second membre de (5.5.7) tend donc vers 0 avec h_{\max} . La convergence est démontrée d'après la Définition 5.4.1. \square

5.5.5 Définition de l'ordre d'une méthode

Pour comparer la précision des méthodes entre elles, il est nécessaire d'introduire la notion d'ordre.

Alors on pose la définition suivante :

Définition 5.5.3. *On appelle ordre de la méthode à un pas*

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n),$$

le plus grand entier p pour lequel, lorsque $h \rightarrow 0$

$$y(t+h) - y(t) - h\Phi(t, y(t); h) = O(h^{p+1}), \quad (5.5.8)$$

ceci pour toute fonction f qui est p continûment dérivable si $m = 1$ (différentiable si $m \geq 1$) et toute solution y de (5.2.1). La méthode est consistante si elle est d'ordre $p \geq 1$.

On a vu que, pour la méthode d'Euler-Cauchy, on a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n\Phi(t_n, y(t_n); h_n) = O(h_n^2),$$

la méthode d'Euler-Cauchy est d'ordre 1. Supposons les pas tous égaux, la notion d'ordre 1 veut dire que si on divise le pas par 2, l'erreur sera seulement divisée par 2 ; cela implique de devoir utiliser des pas de temps petits pour avoir une précision satisfaisante dans les simulations numériques et, donc, de les rendre coûteuses. Il paraît donc utile d'utiliser des méthodes d'ordre plus élevé (les méthodes de Runge-Kutta répondent à cet objectif) (voir livre). Il faut bien noter que si l'erreur locale de troncature est en $O(h_n^2)$, l'erreur de discrétisation de la méthode en tout point de discrétisation de l'intervalle I_0 , est en $O(h_{\max})$ - on rappelle que $h_{\max} = \max(h_n)$.

5.6 Conditions de consistance et de stabilité

Tous les théorèmes ci-dessous sont démontrés dans le livre.

5.6.1 Condition nécessaire et suffisante de consistance

Soit $m = 1$. Une condition nécessaire et suffisante de consistance est donnée par le

Théorème 5.6.1. *Une méthode à un pas est consistante si et seulement si*

$$\forall (t, y) \in I_0 \times \mathbb{R} \quad \Phi(t, y, 0) = f(t, y). \quad (5.6.1)$$

Les deux méthodes à un pas déjà vues sont consistantes. Par exemple, comme nous l'avons noté, la méthode d'Euler-Cauchy vérifie, par construction, la condition $f(t, z(t)) = \Phi(t, z(t); 0)$, elle est donc consistante.

Maintenant on peut répondre à la question posée après la Définition 5.5.1. Si la condition $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$ est satisfaite, alors la consistance est vraie.

5.6.2 Condition suffisante de stabilité

On se place toujours dans le cadre $m = 1$. Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution du problème continu est vrai sous une hypothèse de lipschitzité sur f . Il semble raisonnable, d'après la condition de consistance,

d'imposer aussi une condition de lipschitzité à la fonction Φ . Le fait qui peut paraître surprenant c'est qu'une telle condition suffise à assurer la stabilité de la méthode.

On a le théorème de stabilité suivant :

Théorème 5.6.2. *Pour qu'une méthode à un pas soit stable il suffit que la fonction Φ soit lipschitzienne en y , c'est-à-dire qu'il existe une constante $\Lambda \geq 0$ (indépendante du pas, du temps et de la solution) telle que $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}$ on ait*

$$|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| \leq \Lambda |y_1 - y_2|. \quad (5.6.2)$$

On peut conclure maintenant sur la convergence de la méthode d'Euler-Cauchy. Nous savons qu'elle est *consistante* car sa fonction Φ vérifie la relation $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$. Précisément on a $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$ pour tout h et t ; la fonction f étant lipschitzienne en y pour tout t (voir l'hypothèse (5.2.2)) la fonction Φ l'est aussi indépendamment de h et t , c'est-à-dire que la relation (5.6.2) est satisfaite ; la méthode d'Euler-Cauchy est donc *stable*. On conclut par le Théorème 5.5.1 :

Théorème 5.6.3. *La méthode d'Euler-Cauchy est convergente.*