# Deuxième cours
# Intégration numérique

## 2.1 Introduction

Pour calculer une intégrale, la méthode générale est de déterminer une primitive de la fonction sous l'intégrale que l'on prend entre les bornes d'intégration. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2},\\ \int_\alpha^\beta \sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)]_\alpha^\beta = -\cos(\beta) + \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Ceci permet d'avoir une expression valable quelles que soient les bornes. Cependant on ne peut connaître les primitives que dans certains cas. De plus les bornes sont généralement fixées, on ne s'intéresse qu'à des intégrales définies. C'est le cas, par exemple lorsque l'intégration est utilisée pour déterminer une aire ou un volume par des intégrales multiples.

On peut calculer exactement une intégrale. Par exemple l'intégrale de Riemann est définie comme une limite de somme, la fonction $f$ étant de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux. L'intervalle $[a,b]$ de longueur $L = b-a$ est partitionné en $n$ divisions, de longueur $h = (b-a)/n$, et on définit les points équidistants $x_k = a + kh$ pour $0 \leq k \leq n$. Évidemment on a $x_0 = a$ et $x_n = b$. Le nombre $h$ est appelé le *pas* dans tout ce chapitre.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

C'est numériquement illusoire. Aussi travaille-t-on avec des sommes finies.

## 2.2 Sommes de Riemann

**Proposition 1 (Formule de la moyenne)** $f$ étant de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$, $\exists x^* \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x^*)(b-a). \;\Box$$

Cette formule nous assure qu'il existe un point permettant une évaluation numérique exacte de l'intégrale. Il n'est cependant pas aisé d'obtenir ce point. La Figure **??** illustre cette proposition.

Ne pouvant pas facilement obtenir la valeur exacte, nous allons plutôt essayer d'obtenir un encadrement pour l'intégrale. En supposant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur un intervalle,

$$\exists f_m, f_M | \, \forall x, f_m \leq f(x) \leq f_M.$$

En particulier

$$f_m \leq f(x^*) \leq f_M$$

d'où, si $L = b - a$,

$$f_m \cdot L \leq I \leq f_M \cdot L,$$

en utilisant la formule de la moyenne.

Cet encadrement peut être fait sur chaque sous-intervalle. On note

$$\begin{aligned} f_m^{(k)} &= \min_{[x_k, x_{k+1}[} f(x) \\ f_M^{(k)} &= \max_{[x_k, x_{k+1}[} f(x), \end{aligned}$$

on a

$$f_m^{(k)} \leq f(x) \leq f_M^{(k)}, \; x \in [x_k, x_{k+1}[.$$

Les sommes de Riemann inférieure et supérieure (Figure **??**) associées à la subdivision en $N$ sous-intervalles de l'intervalle d'intégration sont

$$\begin{aligned} I_m^{(N)} &= h \sum_{k=0}^{N-1} f_m^{(k)} \\ I_M^{(N)} &= h \sum_{k=0}^{N-1} f_M^{(k)}, \end{aligned}$$

et on a

$$I_m^{(N)} \leq I \leq I_M^{(N)}.$$

Lorsque la longueur des sous-intervalles tend vers 0 les bornes tendent vers la valeur de l'intégrale. Cette méthode est intéressante parce qu'elle permet d'avoir un encadrement de l'intégrale. Cependant il faut trouver le minimum et le maximum de la fonction pour chaque sous-intervalle, c'est donc une méthode très coûteuse en temps de calcul.

## 2.3 Méthodes élémentaires de quadrature numérique

Les méthodes d'intégration numérique (ou méthodes de quadrature) permettent d'avoir une approximation de l'intégrale avec quelques évaluations de fonction seulement.

Pour évaluer les méthodes de quadrature numérique il est utile d'introduire la notion d'*ordre*. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$. On définit l'*ordre* d'une méthode d'intégration numérique par :
**Définition** Une règle d'intégration numérique est dite d'ordre $n$ lorsqu'elle est exacte pour tout $f \in \mathcal{P}_n$. $\Box$

### 2.3.1 Méthode des rectangles à gauche

L'approximation est simplement

$$\tilde{I}_h^{(g)} = h \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \tag{2.3.1}$$

Cette méthode est illustrée à la Figure **??**.

### 2.3.2 Méthode des rectangles à droite

Dans ce cas

$$\tilde{I}_h^{(d)} = h \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{2.3.2}$$

Les approximations obtenues par les mÃĺthodes des rectangles ne sont des bornes de la valeur de l'intégrale que si la fonction est monotone. Ces méthodes ne sont exactes que lorsque la fonction $f$ est constante (éventuellement par morceaux), *i.e.* si c'est un polynôme d'ordre 0, dans $P_0$. Ce sont des méthodes d'ordre 0. Ces approximations convergent vers l'intégrale lorsque $h \to 0^+$.

### 2.3.3 Point milieu

Dans ce cas du point milieu, le point donnant la hauteur du rectangle est l'image du milieu de l'intervalle

$$\tilde{I}_h^{(m)} = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right). \tag{2.3.3}$$

Cette méthode est exacte pour des fonctions linéaires, c'est-à-dire des polynômes de degré 1, dans $P_1$. C'est une méthode d'ordre 1. La Figure **??** illustre cette méthode.

### 2.3.4 Méthode des trapèzes

Pour cette méthode il faut prendre les deux points de la courbe, à chaque extrémité de l'intervalle, et l'intégrale sur un intervalle est approximée par l'aire du trapèze passant par ces points:

$$\tilde{I}_h^{(t)} = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f(x_k) + f(x_{k+1}) \right).$$

Cette méthode est dépeinte à la Figure **??**. Dans cette somme il est possible de rassembler $f(x_{k+1})$, le point à droite d'un intervalle et $f(x_{k+1})$ le point à gauche de l'intervalle suivant, puisqu'ils sont égaux, cela donne la formule de quadrature du trapèze dite composite (voir Paragraphe 2.4.5) :

$$\tilde{I}_h^{(t)} = \frac{h}{2}(f_0 + f_n) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k). \tag{2.3.4}$$

Au final cette méthode ressemble assez aux méthodes des rectangles puisqu'elle ne s'en distingue que pour le premier et le dernier point. Elle est néanmoins plus efficace, et c'est en particulier une méthode d'ordre un.

## 2.4 Intégration numérique de Lagrange et de Newton-Cotes

### 2.4.1 Polynômes de Lagrange

Soient $[a, b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$. Considérons $(n+1)$ points *distincts* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ (Figure **??**), observons que cela n'interdit pas que $x_0 = a$ et/ou $x_n = b$, alors
**Théorème** Il existe un polynôme $P_n$ et un seul, de degré $\leq n$, tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.4.1}$$

Ce polynôme $P_n$ (relatif à l'ensemble $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et à $f$) est appelé *polynôme de Lagrange* et il est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \tag{2.4.2}$$

avec, pour $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} . \square \tag{2.4.3}$$

**Remarque :** Si on pose

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \tag{2.4.4}$$

un calcul élémentaire montre que $\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)$ dès lors

$$L_i(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}, \quad x \neq x_i. \square \tag{2.4.5}$$

### 2.4.2 Exercices

Soit $f(x) = x$, construire le polynôme de Lagrange passant par les points $(a, f(a) = a)$ et $(b, f(b) = b)$. Vérifier que

$$P_1(x) = a\frac{x - b}{a - b} + b\frac{x - a}{b - a} = x. \tag{2.4.6}$$

On vérifie évidemment que $P_1(a) = a$ et $P_1(b) = b$, aussi que le polynôme de Lagrange $P_1(x)$ est de degré un comme prévu par le théorème, mais aussi que $P_1(x) = f(x) = x$.

Soit $f(x) = x^2$, considérer les deux points $a$ et $b$ et contruire le polynôme de Lagrange de degré deux passant par les points $(a, a^2)$ et $(b, b^2)$. Vérifier que

$$Q_1(x) = a^2\frac{x - b}{a - b} + b^2\frac{x - a}{b - a} = (a + b)x - ab. \tag{2.4.7}$$

On voit que $Q_1(a) = a^2$ et $Q_1(b) = b^2$ mais aussi que le polynôme de Lagrange $Q_1(x)$ est de degré un comme attendu.

### 2.4.3 Cas particulier des points équidistants

On suppose maintenant que les points $x_i$ sont de la forme $x_i = x_0 + ih$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. Introduisons une nouvelle variable réelle $s$ telle que $x = x_0 + sh$. Considérons toujours le polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à $n$ qui interpole la fonction $f$ aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ pour $n > 0$. $L_i(x)$ s'écrit (voir (2.4.3))

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Posons $\mathcal{P}_n(s) = P_n(x_0 + sh)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange se réécrit

$$\mathcal{P}_n(s) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(s),$$

avec la réécriture de $L_i(x)$ en la variable $s$

$$l_i(s) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{s-j}{i-j}. \tag{2.4.8}$$

### 2.4.4 Règles simples de Lagrange

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$. On suppose dans la suite que la fonction $f$ dont on veut estimer l'intégrale sur $[a, b]$ appartient à $\mathcal{R}$. Les règles d'intégration numérique de Lagrange et de Newton-Cotes utilisent l'interpolation de Lagrange.

**Règles de Lagrange** On obtient une règle $L$ d'intégration numérique *simple* en intégrant sur $[a, b]$ le polynôme de Lagrange qui interpole $f$ aux points $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dans la définition de la règle de Lagrange simple $L$ qui suit, le dernier paramètre est fixé à 1. On verra au Paragraphe 2.4.5, traitant de la règle composite, que ce dernier paramètre sera différent de 1. Partant de (2.4.2) on définit

$$L(f, a, b, n, 1) = \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), \tag{2.4.9}$$

avec

$$C_i = \int_a^b L_i(x)dx. \tag{2.4.10}$$

Les premiers paramètres sont évidents. Le quatrième indique que l'on interpole $f$ en $n+1$ points de $[a, b]$. Le cinquième indique que l'on travaille avec des méthodes *simples*, par opposition aux règles *compsées*.

La relations (2.4.4) et (2.4.9) impliquent

$$L(1, a, b, n, 1) = \int_a^b dx = b - a = \sum_{i=0}^{n} C_i. \tag{2.4.11}$$

ce qui donne un critère sur les $C_i$ assurant l'intégration numérique exacte des constantes (c'est le moins que l'on puisse exiger !).

**Règles simples de Newton-Cotes** Ces règles sont les règles de Lagrange où les points $x_i$ sont équidistants dans $[a, b]$. On a $x_i = a + hi$, $0 \leq i \leq n$, avec $h = (b-a)/n$ (soit $x_0 = a$ et $x_n = b$). On note donc ces méthodes avec les mêmes arguments que pour Lagrange

$$NC(f, a, b, n, 1) = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), \tag{2.4.12}$$

avec $C_i = \int_a^b L_i(x)dx$.

Soit (2.4.5), faisons le changement de variable du Paragraphe 2.4.3, comme $dx = h.ds$ il vient

$$C_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx = h\int_0^n l_i(s)ds, \tag{2.4.13}$$

avec

$$l_i(s) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{s-j}{i-j}.$$

**Exemples de méthodes simples de Newton-Côtes**

- *Exemple 1 : Formule simple du rectangle à gauche.* Soit $n = 0$, $x_0 = a$, $h = b - a$, la formule (2.4.12) s'écrit $NC(f, a, b, 0, 1) = C_0 f(a)$ avec $C_0 = \int_a^b L_0(x)dx$. Comme $L_0(x) \equiv 1$ on a $C_0 = b - a = h$ et donc

  $$NC(f, a, b, 0, 1) = hf(a). \tag{2.4.14}$$

  C'est la formule simple du rectangle à gauche (voir la Figure **??**).

- *Exemple 2 : Formules simples du rectangle à droite et du point milieu.* Toujours avec $n = 0$ et $h = b-a$, pour la méthode du rectangle à droite (resp. du point milieu) on prend $x_0 = b$ (resp. $x_0 = (b+a)/2$) et alors $NC(f, a, b, 0, 1) = hf(b)$ (resp. $NC(f, a, b, 0, 1) = hf((b + a)/2)$). La méthode du rectangle à droite est d'ordre 0, mais celle du point milieu est d'ordre un car pour $f(x) = x$, $NC(f, a, b, 0, 1) = hf((b + a)/2) = (b^2 - a^2)/2 = \int_a^b xdx$.

- *Exemple 3 : Formule simple du trapèze.* Soit $n = 1$ et $h = (b-a)$ on a

  $$C_0 = -h\int_0^1 (s-1)ds = \frac{h}{2},$$

  $$C_1 = h\int_0^1 sds = \frac{h}{2}.$$

  D'où, en notant par $f_i$ les $f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq 1$, la formule simple du trapèze

  $$NC(f, a, b, 1, 1) = \frac{h}{2}(f_0 + f_1). \tag{2.4.15}$$

  On vérifie bien (voir (2.4.11)) que $C_0 + C_1 = h = b - a$.

- *Exemple 4 : Formule simple de Simpson.* Soit $n = 2$ et $h = (b - a)/2$ on a

  $$C_0 = h\frac{1}{2}\int_0^2 (s-1)(s-2)ds = h\frac{1}{3},$$

$$C_1 = -h\int_0^2 s(s-2)ds = h\frac{4}{3},$$
$$C_2 = h\frac{1}{2}\int_0^2 s(s-1)ds = h\frac{1}{3}.$$

D'où, en notant par $f_i$ les $f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq 2$, la *formule simple de Simpson*

$$NC(f,a,b,2,1) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2). \tag{2.4.16}$$

Ici encore on vérifie que $C_0 + C_1 + C_2 = 2h = b - a$.

### 2.4.5 Règle itérée ou composite

**Définition** Soit $R(f,a,b,n,1)$ une règle simple à $n$ points, on appelle règle à $n$ points itérée $N$ fois la fonctionnelle linéaire qui à $f \in \mathcal{R}$ fait correspondre le nombre réel

$$R(f,a,b,n,N) = \sum_{j=1}^{N} R(f,a_{j-1},a_j,n,1) \tag{2.4.17}$$

où $a_j = a + \frac{b-a}{N}j$. $\square$

On comprend pourquoi, dans la règle simple, le cinquième argument de la règle simple est posé à un.

Le nombre $(b-a)/N$ joue le rôle de *pas* de la méthode. On peut prendre, si nécessaire, $N$ (resp. $h$) aussi grand (resp. petit) que l'on veut. Par contre le nombre $n$ de points dans chaque sous-intervalle $[a_{j-1}, a_j]$ est fixé indépendamment de $j$. Évidemment on a $a_0 = a$ et $a_N = b$.

**Exemple** Soit la règle simple (2.4.14) du rectangle à gauche : $NC(f,a,b,0,1) = hf(a)$. D'après la formule (2.4.17) on a :

$$NC(f,a,b,0,N) = \sum_{j=1}^{N} NC(f,a_{j-1},a_j,0,1)$$

soit

$$NC(f,a,b,0,N) = hf(a) + hf(a_1) + \cdots + hf(a_{N-1}) = h\sum_{j=0}^{N-1} f(a_j).$$

On retrouve la formule (2.3.1) dont on vérifie ainsi qu'elle est une formule de Newton-Cotes itérée.

**Remarque** On vérifie (exercice) de même que les méthodes des rectangles à droite (voir (2.3.2)), du point milieu (voir (2.3.3)) et la méthode du trapèze (2.3.4) sont des formules de Newton-Cotes itérées. $\square$

**Remarque** Ce passage de la règle simple à la règle itérée permet de mieux comprendre comment "s'organisent" les poids dans les méthodes élémentaires d'intégration numérique. $\square$

## 2.5 Mais encore...

Pour faire un choix dans les méthodes proposées on définit l'erreur de la méthode, en fonction de son pas, comme étant la différence entre $\int_a^b f(x)dx$ et la formule d'intégration numérique. L'erreur commise par les méthodes précédentes est analysée dans le livre en référence.

Les méthodes de Newton-Côtes exposées dans ces notes sont fondées sur l'interpolation de Lagrange. Une autre grande catégorie de méthodes est celle dite des méthodes de Gauss. Elles utilisent l'interpolation polynomiale de Hermite et la théorie des polynômes orthogonaux. Ces méthodes sont aussi exposées dans le bouquin.

Ces méthodes ne préjugent pas des autres méthodes possibles, par exemple des méthodes où les points $x_i$ sont des valeurs assignées où la fonction $f$ est connue en ces points par une expérience physique quelconque. Notons enfin que nous n'abordons pas l'intégration numérique des intégrales multiples. L'intégration numérique est un vaste sujet !