

Tous ces exercices sont associés au cours L3 de mathématiques du Département Géosciences. Ils sont liés au chapitre intitulé : "Résolution des systèmes linéaires  $Ax = b$  par des méthodes directes de Gauss et de Householder."

## Exercice 1

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre  $n$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires quelconques. On rappelle les relations suivantes du cours :

$$\det(I) = 1, \quad (1)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad (2)$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \quad (3)$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad (4)$$

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B). \quad (5)$$

1) Soit  $I$  la matrice unité d'ordre  $n$ . Peut-on avoir  $AB - BA = \lambda I$ ,  $\lambda$  étant un scalaire non nul ?

2) Peut-on avoir  $AB + BA = 0$  ?

## Exercice 2

a) Trouver, par la méthode de Gauss sans stratégie de pivot, l'inverse de la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

en supposant que  $M$  est inversible. On fait l'hypothèse que  $a \neq 0$ .

Vérifier que  $MM^{-1} = I$  et en déduire le déterminant de la matrice  $M^{-1}$ . Vérifier la valeur de ce déterminant en le calculant directement avec l'expression de  $M^{-1}$ .

b) Soit la matrice  $N$ ,  $2 \times 2$  bloc-symétrique (cela ne veut pas dire que  $N$  est symétrique, elle l'est si les matrices blocs-diagonaux sont symétriques) suivante :

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

que l'on suppose inversible.

En supposant aussi la matrice  $A$  inversible, vérifier formellement, par un calcul direct, que l'inverse de  $N$  est :

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BSB^T A^{-1} & -A^{-1}BS \\ -SB^T A^{-1} & S \end{pmatrix},$$

où  $S = (C - B^T A^{-1} B)^{-1}$ . Pour des raisons de dimensionnalité des matrices, la matrice  $M = C - B^T A^{-1} B$  est carrée ; il est donc légitime de considérer son inverse et on fait l'hypothèse qu'il existe.

**N.B. :** Les matrices  $A$  et  $C$  sont carrées, mais la matrice  $B$  peut-être rectangulaire.

c) Vérifier le résultat du a) par le b).

d) Supposons les matrices  $A$  et  $C$  symétriques, la matrice  $N$  est alors symétrique. Sachant que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, que si  $E$  et  $F$  sont deux matrices alors  $(EF)^T = F^T E^T$  (cette propriété s'étend à tout produit de matrices), vérifier que  $N^{-1}$  est aussi une matrice symétrique.

### Exercice 3. Existence de la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive d'ordre  $n$ . On note par  $M^T$  la matrice transposée d'une matrice  $M$ , par  $L$  une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale et par  $U$  une matrice triangulaire supérieure.

a) Expliquez pourquoi la matrice  $A$  est régulière ?

b) On considère les sous-matrices (symétriques)  $\Delta_k$  d'éléments  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ , de la matrice  $A = (a_{ij})$ . Montrer que les  $n$  sous-matrices  $\Delta_k$  pour  $1 \leq k \leq n$  sont définies positives.

*Indication* : On pourra considérer, pour  $1 \leq k \leq n$ , le vecteur quelconque  $w = (w_i)_{1 \leq i \leq k}$  et calculer le produit scalaire  $(\Delta_k w, w)$  en le reliant à un produit scalaire  $(Av, v)$ .

c) Comme toutes les sous-matrices  $\Delta_k$  sont définies positives, et donc inversibles, il existe une unique décomposition  $A = LU$  (théorème du cours). Montrer que les éléments diagonaux  $u_{ii}$  de  $U$  sont strictement positifs.

d) On considère la matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{u_{11}}, \dots, \sqrt{u_{nn}})$ , d'où  $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{u_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}})$ . En écrivant que  $A = LU = L\Lambda\Lambda^{-1}U = BC$  avec  $B = L\Lambda$  et  $C = \Lambda^{-1}U$ , prouver que  $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = I$  où  $I$  est la matrice identité.

*Indication* : On rappelle que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

e) En déduire que  $A = BB^T$ .

f) On peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice  $B$  soient tous strictement positifs. Montrer alors que la factorisation correspondante  $A = BB^T$  est unique.

La décomposition  $A = BB^T$  est la décomposition de Cholesky d'une matrice  $A$  (symétrique définie positive).

### Exercice 4

Soient deux matrices carrées d'ordre  $n$ , montrer que  $\det(\lambda I - BA) = \det(\lambda I - AB)$ . Les valeurs propres non nulles des deux matrices  $AB$  et  $BA$  sont les mêmes.

*Indication* : On pourra considérer les produits matriciels

$$\left( \begin{array}{c|c} \mu I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array} \right) \quad (6)$$

et

$$\left( \begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array} \right). \quad (7)$$

### Exercice 5

Les matrices  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  de cet exercice, exhibées respectivement par (11), (12) et (13) sont les matrices de discrétisation par la méthode aux différences finies de l'opérateur  $-\frac{d^2 u}{dx^2}$ . Ces matrices correspondent à une discrétisation avec un pas constant  $h$ , au facteur  $\frac{1}{h^2}$  près, de cet opérateur. La matrice  $A_1$  est associée à un problème de Dirichlet homogène (valeurs nulles de la solution au bord du domaine : par exemple si le domaine est l'intervalle  $[0, 1]$  le bord est l'ensemble  $\{0, 1\}$  et on impose à la solution de satisfaire aux conditions  $u(0) = u(1) = 0$ ). La matrice  $A_2$  est associée aux conditions  $\frac{du}{dx}(0) = 0$  (dite de Neumann homogène) et  $u(1) = 0$ . Enfin



