Tous les exercices sont indépendants. Le d) de l'exercice 1 est un peu difficile. Durée de l'examen : 2 heures 1/4. La clarté de la rédaction sera évidemment prise en compte.

Exercice 1

a)Trouver, par la méthode de Gauss sans stratégie de pivot, l'inverse de la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

en supposant que M est inversible. On fait l'hypothèse que $a \neq 0$.

b) Soit la matrice N, 2×2 bloc-symétrique (cela ne veut pas dire que N est symétrique, elle l'est si les matrices blocs-diagonaux sont symétriques) suivante :

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

que l'on suppose inversible.

En supposant aussi la matrice A inversible, vérifier formellement, par un calcul direct, que l'inverse de N est :

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} & -A^{-1}BS \\ -SB^TA^{-1} & S \end{pmatrix},$$

où $S = (C - B^TA^{-1}B)^{-1}$. Pour des raisons de dimensionnalité des matrices, la matrice $\mathcal{M} = C - B^TA^{-1}B$ est carrée ; il est donc légitime de considérer son inverse et on fait l'hypothèse qu'il existe.

N.B. : Les matrices A et C sont carrées, mais la matrice B peut-être rectangulaire.

c) Vérifier le résultat du a) par le b).

d) Supposons les matrices A et C symétriques, la matrice N est alors symétrique. Sachant que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, que si E et F sont deux matrices alors $(EF)^T = F^TE^T$ (cette propriété s'étend à tout produit de matrices), vérifier que N^{-1} est aussi une matrice symétrique.

Exercice 2

Soit la formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Montrer que cette formule d'intégration numérique est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

Exercice 3

On rappelle qu'une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est définie positive si $(Ax, x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique soit définie positive est que toutes les valeurs propres soient strictement positives.

a) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix},$$

constater que, pour $1/2 \leq a < 1$, la matrice n'est pas strictement diagonalement dominante (SDD). Montrer que pour ces valeurs de a elle est définie positive .

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que cette matrice est SDD pour $|a| < 2$. Montrer que, pour toute valeur de a, cette matrice (symétrique) n'est pas définie positive.

N.B. : Cet exercice prouve qu'une matrice symétrique peut être définie positive sans être SDD et inversement (même en étant symétrique).

Exercice 4

Résoudre le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

sous la condition initiale $x = (1, 0, 0)^T$.

Exercice 5

Soit l'équation

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Elle possède, pour tout μ, l'équilibre trivial $x = 0$ et, pour $\mu > 0$, deux équilibres non triviaux $x = \pm\sqrt{\mu}$. On a un point de bifurcation au point $(\mu, x) = (0, 0)$. La stabilité de la branche $x = \sqrt{\mu}$, pour $\mu > 0$, des équilibres a été étudiée au cours.

Justifier la stabilité de la branche $x = -\sqrt{\mu}$.

