Mathématiques L3– Examen 2007

Exercice 5. Preuve de la convergence de la méthode d'Euler-Cauchy (25 mn)

Soit à résoudre numériquement, par la méthode d'Euler-Cauchy, le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I_0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}, \tag{1}$$

où $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f est une fonction nonlinéaire de classe $\mathcal{C}^1$ de $I_0 \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. On suppose aussi que f est lipchitzienne par rapport à la variable y pour tout $t \in I_0$. On considère une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = t_0 + T$ de l'intervalle I_0. On pose $h_n = t_{n+1} - t_n$ (pour $0 \leq n \leq N-1$) et $h = \max(h_n)$.

1) Définir et calculer l'erreur locale de troncature de la méthode d'Euler-Cauchy.

2) Soit la définition générale des méthodes à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \tag{2}$$

où Φ est une fonction que l'on suppose au moins continue de $I_0 \times \mathbb{R}^m \times [0, h]$ dans $\mathbb{R}^m$. On fait démarrer le schéma de façon naturelle par $y_0 = y(0)$.

En s'appuyant sur les théorèmes généraux relatifs aux méthodes à un pas, montrer que la méthode d'Euler-Cauchy est :

2a) consistante,

2b) stable,

2c) convergente.