Mathématiques – Examen

Exercice 1 : Méthodes numériques de résolution d'équations non-linéaires (15 min.)

Enumerez et comparez brièvement (sans équations) les méthodes numériques de résolution d'équations scalaires non-linéaires. Discutez les questions de la convergence/divergence, et de la précision/vitesse de convergence

Exercice 2 : Algèbre linéaire - méthodes directes (20 min.)

La méthode (ou méthode d'élimination) de Gauss permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires, du type $Ax = b$, en amenant une matrice A régulière à une forme triangulaire. Rappelez la procédure et les règles à suivre lors de la résolution. Utilisez pour votre notation la matrice générale suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \dots & a_{ij} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Application numérique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 7 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Algèbre linéaire - méthodes itératives (30 min.)

Toujours dans le problématique $Ax = b$, les méthodes itératives visent à construire une série de vecteurs $x^{(k)}$ qui tendent vers la vraie solution x au fur et à mesure des itérations ($x^{(k)} \longrightarrow x$ quand $k \longrightarrow \infty$, cf. TD4). Pour créer cette série de vecteurs, nous utilisons un schéma itératif, qui s'écrit, de façon général :

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + c \qquad (1)$$

On cherche en général la matrice d'itération B et le vecteur c, et nous utilisons une décomposition de la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M est une matrice régulière. Le schéma itératif associé s'écrit :

$$Mx^{(k+1)} = N\,x^{(k)} + b \qquad (2)$$

La méthode de Jacobi utilise une décomposition où $M = D$ et $N = E + F$, et donc $A = D - E - F$.

a) Rappelez à quoi correspondent les matrices D, E et F.

b) Prenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Trouvez les matrices D, E et F.

c) Écrivez la relation de récurrence sous la forme $D\,x^{(k+1)} = (E+F)\,x^{(k)} + b$.

d) Si D est inversible, multipliez (de gauche) l'équation précédente par D^{-1}. pour obtenir une relation de récurrence de la même forme que l'équation (1). En déduire B et c.

e) Déterminer les vecteurs de la série $x^{(k)} = \begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix}$; si $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; pour $k = 1$, 2 et 3.

f) En appliquant la relation de récurrence, établir un lien entre les éléments $u^{(k+1)}$ et $v^{(k)}$; ainsi que des éléments $v^{(k+1)}$ et $v^{(k)}$.

g) En re-appliquant la relation de récurrence, établir un lien entre les éléments $u^{(k+2)}$ et $u^{(k)}$, ainsi que des éléments $v^{(k+2)}$ et $v^{(k)}$.

h) En soustrayant 1/3 de chaque côté, reconnaissez qu'on tombe sur des suites géométriques. Quelle est la raison des suites ?

i) Afin de vérifier la convergence, donnez le rayon spectral de B.

Exercice 4. Résolution analytique d'équation différentielle (30 min.)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-x^2)y' - 2xy = 1$$

a) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation homogène de (E), puis trouver une solution particulière de (E) (particulière signifiant que l'on cherche une solution $y_{(1)}$ de (E) vérifiant la condition initiale $y_{(1)}(x_0) = 0$ où évidemment $x_0 \in]-1,1[$) à l'aide de la **variation de la constante**. Conclure sur la solution de (E). On prendra $x_0 = 0$.

b) Déterminer la solution qui pour $x = 0$ prend la valeur $y = 1$.

c) Résoudre (E) sur $]-\infty,-1[$ et $]1,\infty[$ *(par la méthode du a)*.

d) Montrer que l'on obtient la même expression de la solution, au signe près de la constante, sur $]-1,1[$ et sur $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$.

e) Que se passe-t-il aux points $x = -1$ et $x = 1$ (discuter suivant la valeur de la constante).

Exercice 5. Preuve du théorème fondamental des méthodes numériques de résolution des EDO (25 mn)

Cet exercice a pour objectif de vérifier que les étudiants ont compris les notions essentielles relatives aux schémas numériques de résolution des EDO. On tiendra le plus grand compte de la précision des notations et des formulations.

Soit à résoudre numériquement le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I_0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1}$$

où $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f est une fonction nonlinéaire continue de $I_0 \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. On considère une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = t_0 + T$ de l'intervalle I_0. On pose $h_n = t_{n+1} - t_n$ (pour $0 \leq n \leq N-1$) et $h = \max(h_n)$.

Soit la définition générale des méthodes à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \tag{2}$$

où Φ est une fonction que l'on suppose continue de $I_0 \times \mathbb{R}^m \times [0, h]$ dans $\mathbb{R}^m$. On fait démarrer le schéma de façon naturelle par $y_0 = y(0)$.

a) Une question essentielle est de savoir si y_n approche $y(t_n)$? C'est la question de la *convergence*. La définir.

b) Après avoir défini la notion d'*erreur locale de troncature* ε_n à l'instant t_n, définir la notion de *consistance globale* de la méthode (2) à un pas.

c) On considère la méthode (2) et la méthode perturbée

$$z_{n+1} = z_n + h_n \Phi(t_n, z_n, h_n) + \eta_n, \tag{3}$$

ce schéma est initialisé par une valeur z_0 qui n'est pas nécessairement égale à $y(0)$. Définir la stabilité de la méthode (2). la stabilité signifie qu'une "petite" perturbation sur les données n'entraîne qu'une "petite" perturbation sur la solution calculée lorsque $h \to 0$.

d) Démontrez le théorème fondamental suivant. Un schéma qui est à la fois consistant et stable est convergent. On pourra poser $z_n = y(t_n)$ et $\eta_n = \varepsilon_n$.

N.B. : La preuve de ce résultat est immédiate, elle n'est qu'un jeu d'écritures. $\square$

