Mathématiques L3– Correction de l'examen partiel du 18/11/09

Exercice 1

Trouver la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ ou de $x^2 = x + 1$, revient à trouver le point fixe de l'équation $x = F(x)$ avec $F(x) = \sqrt{x+1}$. On sait (théorème 3.1 du cours) que la méthode de Picard converge si F est une contraction lipschitzienne. Or $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $J = [0, \infty[$. On peut donc partir d'un point arbitraire sur J pour converger vers le point fixe, ou la racine, a satisfaisant à $a = \sqrt{1+a}$.

Le processus itératif s'écrit $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+\sqrt{1+x_{n-1}}}$. On a donc la convergence des itérés vers $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.

On remarque que la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est une équation banale du second degré, est $a = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803....$

Exercice 2

(1) Soit un maillage régulier de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n$, avec $x_1 = a$ et $x_{n+1} = b$. Le pas h du maillage est $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + (i-1)h$ pour $1 \leq i \leq (n+1)$. Sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la méthode des trapèzes est définie par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})). \tag{1}$$

Or on a $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$. D'après (1) il vient $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n+1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$, soit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h\sum_{i=2}^{n} f(x_i). \tag{2}$$

Supposons maintenant que $f(x) = C$ où C est une constante. Son intégrale sur $[a, b]$ est $C(b-a)$. Par ailleurs, le second membre de (2) s'écrit $\frac{h}{2}(2C) + h\sum_{i=2}^{n} C = h\sum_{i=1}^{n} C = nC\frac{b-a}{n} = C(b-a)$. La méthode des trapèzes est exacte pour les constantes.

On remarque qu'il suffit que la méthode soit exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour qu'elle soit exacte sur $[a, b]$.

Vérifions qu'elle est exacte pour $f(x) = x$. Dès lors, d'après ce qu'on vient de voir, elle sera exacte pour $f \in \mathcal{P}^1$, où $\mathcal{P}^1$ est l'espace des polynômes de degré un. D'après la remarque faite il suffit de vérifier l'exactitude de la formule sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Le premier membre de (1) est évidemment $\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = (x_{i+1} - x_i)\frac{x_{i+1}+x_i}{2} = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}(x_{i+1} + x_i) = \frac{h}{2}(x_{i+1} + x_i)$. Le dernier terme est exactement l'expression du second membre de (1) si $f(x) = x$. Ce qui conclut.

La méthode ne peut pas être exacte pour $f \in \mathcal{P}^2$, espace des polynômes de degré deux. Soit $f(x) = x^2$, la formule serait exacte si on pouvait calculer exactement l'aire d'un arc de parabole sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un trapèze. Ce qui est évidemment impossible.

(2) Cette question est un très simple rappel du cours. On a

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})). \tag{3}$$

(3) Soit la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt. \tag{4}$$

Introduisons la fonction

$$(x-t)_+ = \begin{cases} (x-t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}. \tag{5}$$

et considérons le terme intégral dans (4). On a $\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b$. Or si $t \in [x,b]$ par définition $(x-t)_+ = 0$ et si $t \in [a,x]$ par définition $(x-t)_+ = x-t$. On peut écrire $\int_a^x (x-t)f''(t)dt = \int_a^x (x-t)_+ f''(t)dt + \int_x^b (x-t)_+ f''(t)dt$ puisque la dernière intégrale est nulle. Nous avons donc $\int_a^x (x-t)f''(t)dt = \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt$, et on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt. \tag{6}$$

Appliquons l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'équation (6). Cet opérateur est linéaire en la fonction, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}(f_1+f_2) = \int_a^b (f_1+f_2)(x)dx - \frac{h}{2}\Big((f_1+f_2)(a) + (f_1+f_2)(b)\Big) = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2).$$

On a donc en appliquant $\mathcal{L}$ à l'équation (6)

$$\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(f(a)) + f'(a)\mathcal{L}(x-a) + \mathcal{L}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right).$$

Comme $\mathcal{L}(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$ avec $h = b-a$, $\mathcal{L}(f)$ représente l'erreur de la méthode des trapèzes appliquée à la fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ en la variable x. On a vu au (1) que la méthode est exacte pour les constantes et les polynômes de degré un. On a donc $\mathcal{L}(f(a)) = 0$ et $\mathcal{L}(x-a) = 0$. Il reste $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right)$ où $\mathcal{L}$ opère en la variable muette x, ce que l'on note par $\mathcal{L}_x$. Cet opérateur est constitué en partie par une intégrale en x. On a par définition de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) = \int_a^b \left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) dx - \frac{b-a}{2}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt|_{x=a} + \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt|_{x=b}\right). \tag{7}$$

On peut intervertir les deux signes intégrales car $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ et f'' est continue ; de plus la fonction $(x-t)_+$ est (au moins !) continue en ces deux variables. Comme on travaille sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, l'intégrable double existe et on peut (par le théorème de Fubini) intervertir les deux signes d'intégration. Il vient

$$\int_a^b \left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) dx = \int_a^b f''(t) \left(\int_a^b (x-t)_+ dx\right) dt.$$

Finalement d'après (7) on a :

$$\mathcal{L}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) = \int_a^b f''(t)K(t)dt,$$

avec

$$K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - \frac{b-a}{2}\left((x-t)_+|_{x=a} + (x-t)_+|_{x=b}\right).$$

On vérifie que $K(t) = \mathcal{L}_x((x-t)_+)$.

Calculons $K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - \frac{b-a}{2}\left((a-t)_+ + (b-t)_+\right)$ pour $a \leq t \leq b$. Par définition on a $(a-t)_+ = 0$ et $(b-t)_+ = (b-t)$ pour tout t tel que $a \leq t \leq b$. On a donc

$$K(t) = \frac{(x-t)_+^2}{2}|_{x=a}^{x=b} - \frac{b-a}{2}(b-t),$$

soit

$$K(t) = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b-a}{2}(b-t) = \frac{(b-t)(a-t)}{2}.$$

Il est évident que la fonction K est positive pour tout $t \in [a,b]$, c'est là un point essentiel pour appliquer le théorème de la moyenne. Dès lors il existe un point $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f''(t)K(t)dt = f''(\xi)\int_a^b K(t)dt.$$

et donc

$$e(h) = \mathcal{L}(f) = f''(\xi)\int_a^b K(t)dt.$$

Le calcul de l'intégrale de K est élémentaire, il suffit de développer ce polynôme et d'intégrer terme à terme. On trouve $\int_a^b K(t)dt = \frac{1}{12}(a-b)^3 = -\frac{1}{12}h^3$ et donc $e(h) = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi)$.

Comme la dérivée seconde d'un polynôme de degré un est nulle, la méthodes des trapèzes est exacte si $f \in \mathcal{P}^1$. Par contre la méthode est inexacte pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à deux. On dit que cette méthode est d'ordre un (ne pas confondre avec l'ordre de l'erreur $e(h)$ qui est d'ordre 3 en h).

Exercice 3

L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux est stable pour l'opération $f \to tf' - f$. En vertu du même principe qu'à l'exercice 3 cherchons une solution particulière de la forme $x_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. En remplaçant dans l'équation, il vient $t(2\alpha t + \beta) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + t^2$ soit, en identifiant les coefficients des termes de même degré : $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ et β quelconque. On peut donc prendre $\beta = 0$ et $x_p(t) = t^2$ est donc une solution particulière. Calculons les solutions x_h de l'équation homogène. On a $t\dot{x} = x$, soit $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{t}$; il vient $\log x = \log t + \log C$ ou encore $x_h(t) = Ct$ où C est une constante.

La solution générale est donc $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = t^2 + Ct$.

Exercice 4

Cet exercice ne nécessite que des calculs triviaux que nous ne détaillerons pas.

(1) Soit l'équation

$$y'' + y' + (-2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})y = 0, \tag{8}$$

montrons que $f(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière. On vérifie que

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

et

$$f''(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

Par conséquent

$$f''(x) + f'(x) + (-2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})f(x) = 0.$$

(2) Soit λ une fonction telle $y = \lambda f$. On a :

$$y' = f'\lambda + \lambda' f,$$

et

$$y'' = f''\lambda + 2\lambda' f' + \lambda'' f.$$

Portons ces expressions dans l'équation (8).

$$f''\lambda + 2\lambda' f' + \lambda'' f + f'\lambda + \lambda' f + (-2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})\lambda f = 0,$$

soit

$$\lambda\left(f'' + f' + (-2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})f\right) + 2\lambda' f' + \lambda'' f + \lambda' f = 0.$$

Comme f est une solution particulière de l'équation, le facteur de λ est nul. Il reste

$$2\lambda' f' + \lambda'' f + \lambda' f = 0.$$

Posons $\omega = \lambda'$, ω vérifie donc l'équation du premier ordre

$$2\omega f' + \omega' f + \omega f = 0,$$

ce qui, par les expressions de f et f', donne

$$\omega' = \omega\left(-3 + \frac{2}{x}\right).$$

 ©