Mathématiques L3– Correction du partiel du 30/03/2012

Exercice 1

Par la linéarité de l'intégration il suffit de montrer que la formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right), \tag{1}$$

intègre exactement les constantes et les monômes x, x^2 et x^3, puisque ces monômes forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Si $f=C$ où C est une constante, il vient :

$$\int_a^b Cdx = C(b-a),$$

alors que $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = C(b-a)$. Les constantes sont exactement (et heureusement !) intégrées.

Si $f(x)=x$, on a :

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{6}\left(3(b+a)\right),$$

alors que $\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a+4(\frac{a+b}{2})+b = 3(b+a)$. La formule (1) est aussi exacte.

Si $f(x)=x^2$, on a :

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b-a}{6}\left(2(b^2+ab+b^2)\right),$$

alors que

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a^2+4\frac{(a+b)^2}{4}+b^2 = 2(b^2+ab+b^2).$$

La formule (1) est aussi exacte dans ce cas.

Finalement soit $f(x)=x^3$, on a :

$$\int_a^b x^3dx = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left(\frac{3}{2}(b+a)(b^2+a^2)\right) = \frac{b-a}{6}\left(\frac{3}{2}(a^3+ba^2+ab^2+b^3)\right), \tag{2}$$

alors que

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a^3+4\frac{(a+b)^3}{8}+b^3 = a^3+\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{2}+b^3,$$

soit

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = \frac{3}{2}(a^3+ba^2+ab^2+b^3).$$

L'expression

$$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

est donc égale à (2). La formule de Simpson est encore exacte si $f(x)=x^3$, ce qui conclut.

Exercice 2

Calculons les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

alors on a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(3+\lambda) \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $P(\lambda) = -(3+\lambda)\lambda(1+\lambda) + 2\left(-1-2(1+\lambda)\right) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6$ qui a pour racine évidente -2. Dès lors $P(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+3)$, les deux autres racines de $P(\lambda)$ sont $-1 \pm i\sqrt{2}$.

Calculons les vecteurs propres associés. Un calcul élémentaire montre que :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre -2. Par conséquent :

$$X_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

est une solution.

Toujours par un calcul élémentaire (un peu fastidieux) on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $(-1 + i\sqrt{2})$ est

$$v_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$Z = e^{-t} e^{i\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

est une solution complexe du système. Elle s'écrit :

$$Z = e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

d'où en séparant les parties réelle et imaginaire

$$Z = e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

de la forme $Z = X_2 + iX_3$.

Remarque : On peut évidemment - mais c'est inutile - calculer le vecteur propre v_3, associé à la troisième valeur propre $\lambda_3 = -1 - i\sqrt{2}$ nécessairement conjuguée (voir cours) à λ_2. De plus on sait (voir cours 6) que le vecteur v_3 est conjugué au vecteur v_2. $\square$

On sait (voir cours 6) que les parties réelle et imaginaire de Z sont des solutions indépendantes du système. Donc

$$X_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

et

$$X_3 = e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

sont solutions. Finalement la solution du système est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -2C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\left(\sin(\sqrt{2}t)\right) \\ C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(-\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\left(-\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \end{pmatrix},$$

où les constantes C_1, C_2 et C_3 sont déterminées par la condition initiale. Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve facilement $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$ et $C_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, d'où la solution désirée :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{5\sqrt{2}}{6}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

supposée inversible et donc de déterminant non nul, c'est-à-dire que $ac - b^2 \neq 0$. Calculons son inverse par la méthode de Gauss, sans stratégie de pivot, vue au septième cours et dont nous empruntons les notations. Comme $a \neq 0$, multiplions-la par la matrice

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$E^{(1)}M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

d'où

$$M = (E^{(1)})^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

soit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix}^{-1} E^{(1)} = U^{-1}E^{(1)}$$

avec une définition évidente de la matrice U. La matrice U étant triangulaire supérieure est très facile à inverser. On trouve, sachant que $ac - b^2 \neq 0$:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix},$$

donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Il est immédiat que $MM^{-1} = M^{-1}M = I$. Comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, on a $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$. Comme $\det(I) = 1$ et que l'on a trivialement $\det(M) = ac - b^2$, il vient $\det(M^{-1}) = 1/(ac - b^2)$.

Soit l'expression (3) de M^{-1}, elle est de la forme $M^{-1} = \lambda A$ avec $\lambda = 1/(ac - b)$ et

$$A = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que $\det(A) = ac - b^2$. On a donc $\det(M^{-1}) = \lambda^2 \det(A) = \Big(1/(ac - b^2)\Big)^2 \det(A) = 1/(ac - b^2)$, on retrouve l'expression précédemment calculée.

Exercice 4

1) a. L'équation admet une solution par le théorème de la valeur intermédiaire. Cette solution est unique car la fonction est strictement croissante sur $I = [a, b]$ car $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. On note α cette unique solution.

b. L'équation de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$ au point x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

L'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est $x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

2) a. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'(x) > 0$, donc $1/f'(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent la fonction $x \mapsto f(x)/f'(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $x \mapsto g(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Comme α est un zéro de f et $f'(\alpha) > 0$ on a évidemment $g(\alpha) = \alpha$, α est un point fixe de g. De plus

$$g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)},$$

comme $f(\alpha) = 0$ on a donc $g'(\alpha) = 0$.

3) a. La restriction du logarithme népérien à un segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, avec $a < 1$, satisfait aux conditions de l'énoncé (figure 1).

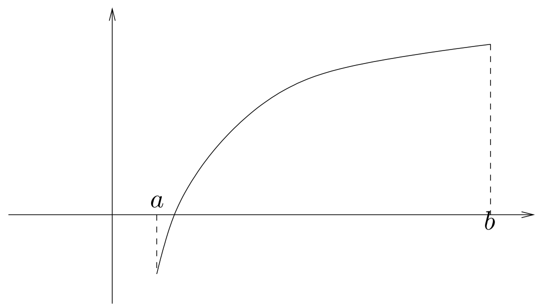

FIG. 1 – Exemple de graphe de f avec $0 < a < 1$: le logarithme népérien.

b. Supposons $x_n \in [a, \alpha]$, il est alors dans le domaine de f et $f'(x) > 0$; en particulier on a $f'(x_n) > 0$ et x_{n+1} est bien défini par

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

Comme $x_n \leq \alpha$ on a $f(x_n) \leq 0$ et donc $x_{n+1} \geq x_n$ car $f'(x_n) > 0$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f entre x_n et x_{n+1}, il existe $c \in]x_n, x_{n+1}[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Comme f' est supposée décroissante dans cette question, on a $f'(c) \leq f'(x_n)$. Or $x_{n+1} - x_n \geq 0$, on en déduit, puisque

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \leq f'(x_n),$$

que l'on a $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$. D'après (4) $f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0$, on a donc $f(x_{n+1}) \leq 0$. On en déduit que $x_{n+1} \leq \alpha$.

c. D'après le 3) b., la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. Ells est donc convergente. Sa limite, que l'on note β appartient à l'intervalle $[a, \alpha]$ puique l'on part de $x_0 = a$. La fonction g est donc continue en β et la définition de la suite (x_n) par $x_{n+1} = g(x_n)$ entraîne alors que $g(\beta) = \beta$. Or, d'après la définition de g, un point fixe de g est un zéro de f, comme α est le zéro unique de f dans I, $\beta = \alpha$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α