Mathématiques L3– Correction de l'examen partiel du 13/11/08

Exercice 1

i) Une matrice orthogonale réelle A est une matrice vérifiant $A^T A = AA^T = I$. Comme ici $A = A^T$, il suffit donc de vérifier que $A^2 \neq I$. Or

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

ce qui conclut, la matrice A n'est pas orthogonale.

ii) 1) Exhibons la matrice $(S - \lambda I)$

$$S - \lambda I = \begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire de $det(S - \lambda I) = (\cos t - \lambda)^2 + \sin^2 t = \lambda^2 - 2\lambda \cos t + 1$. Les racines sont $\lambda_\pm = \cos t \pm i \sin t = e^{\pm it}$.

2) Soit $v_2 = (x_1, x_2)^T$ le vecteur propre associé à la valeur propre e^{it}. On a $Sv_2 = e^{it} v_2$, soit

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = e^{it} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

ou encore

$$\begin{cases} \cos t \; x_1 - \sin t \; x_2 = (\cos t + i \sin t) x_1 \\ \sin t \; x_1 + \cos t \; x_2 = (\cos t + i \sin t) x_2 \end{cases}. \tag{4}$$

Il vient

$$\begin{cases} -x_2 \; \sin t = i x_1 \; \sin t \\ x_1 \; \sin t = i x_2 \; \sin t \end{cases}. \tag{5}$$

Comme un vecteur propre est déterminé à une constante près, on peut choisir $x_1 = 1$, alors le système (5) donne $x_2 = -i$.

De même soit $v_1 = (y_1, y_2)^T$ le vecteur propre associé à la valeur propre e^{-it}. On est amené à considérer le système

$$\begin{cases} \cos t \; y_1 - \sin t \; y_2 = (\cos t - i \sin t) y_1 \\ \sin t \; y_1 + \cos t \; y_2 = (\cos t - i \sin t) y_2 \end{cases}. \tag{6}$$

d'où

$$\begin{cases} -y_2 \; \sin t = -i y_1 \; \sin t \\ y_1 \; \sin t = -i y_2 \; \sin t \end{cases}. \tag{7}$$

Comme un vecteur propre est déterminé à une constante près, on peut choisir $y_1 = 1$, alors le système (7) donne $y_2 = i$.

Les vecteurs propres v_1 et v_2 sont complexes, le produit scalaire est défini par la formule $(v_1, v_2)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^2 y_i \overline{x_i}$ (voir (1.3) du cours, la barre désignant le complexe conjugué).

N.B. : La définition du produit scalaire de deux vecteurs complexes est le seul point de l'exercice demandant un peu d'attention. □

On a donc $(v_1, v_2) = 1.1 + i.\overline{(-i)} = 1.1 + i.i = 0$. Les deux vecteurs propres sont orthogonaux. Pour décider de l'orthonormalisation de ces vecteurs propres on peut choisir la norme euclidienne. Elle est définie par la racine carrée de la somme des carrés des valeurs abolues des composantes (voir paragraphe 1.1.8 du cours). Les valeurs absolues (ou modules) des composantes de v_1 et v_2 sont toutes égales à un, donc $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Alors, si on divise chacune des composantes de v_1 et v_2 par $\sqrt{2}$, les vecteurs v_1 et v_2 seront orthonormalisés, on a $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

iii) 1) On calcule $det(A - \lambda I)$ en développant, par exemple, la matrice $(A - \lambda I)$ par rapport à sa première ligne. On vérifie alors que $det(A - \lambda I) = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - (2-\lambda)$. Les racines de ce déterminant sont $2 - \sqrt{2}$, 2 et $2 + \sqrt{2}$.

2) Il est maintenant facile de vérifier que la première colonne de S est le vecteur propre (la prise en compte du facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ n'est pas important à ce niveau puisqu'un vecteur propre, nous le répétons encore, est défini à une constante près) associé à la valeur propre $2 - \sqrt{2}$, on vérifie immédiatement que :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (2 - \sqrt{2}) \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} . \tag{8}$$

ce qui conclut.

Il est presque aussi aisé de calculer directement le vecteur propre en utilisant sa définition. De même la deuxième (resp. troisième) colonne est associé à la valeur propre 2 (resp. $2 + \sqrt{2}$).

Si v_i, $1 \leq i \leq 3$ sont les vecteurs propres précédents, comme la matrice A est réelle symétrique on sait que les vecteurs propres gauche et droit sont identiques et qu'ils sont orthogonaux 2 à 2 quand toutes les valeurs propres sont distinctes...et c'est le cas ici (voir théorème 1.3 (chapitre 1) et les commentaires qui précèdent). On sait donc que les vecteurs propres sont orthogonaux. On le vérifie, dans notre cas directement par un calcul à la main en calculant 2 à 2 le produit scalaire de ces vecteurs : si v_1 (resp. v_2) a pour composantes $(x_1, x_2, x_3)^T$ (resp. $(y_1, y_2, y_3)^T$), alors $(v1, v_2) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i)$.

De plus, on constate que, dans la norme euclidienne, $\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = \|v_3\|_2 = \sqrt{2}$. Leur division par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ assure donc qu'ils sont orthonormaux.

3) La matrice S est symétrique : $S = S^T$. Calculons donc $S^T S = S S^T = S^2$. On vérifie immédiatement que $S^2 = \frac{1}{2}(2I)$, où I est la matrice identité dans $\mathcal{M}_{3,3}$. Donc $S^T.S = S.S^T = I$, c'est-à-dire que $S^T = S^{-1}$.

Exercice 2

Remarquons d'emblée que si λ est une valeur propre nulle de AB alors $det(AB) = 0$; mais $det(AB) = det(A)det(B) = det(B)det(A) = det(BA)$ et si $det(AB) = 0$ alors $det(BA) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda = 0$ est aussi valeur propre de BA.

Soit $\mu \in \mathbb{C}$ un scalaire quelconque, considérons les produits des matrices-blocs suivantes d'ordre $2n$ (attention à l'ordre des facteurs), toutes les matrices constituantes étant des matrices d'ordre n.

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline 0 & \mu^2 I - BA \end{array} \right), \tag{9}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu^2 I - AB & 0 \\ \hline B & \mu I \end{array}\right). \tag{10}$$

Posons

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right), \tag{11}$$

et calculons les déterminants des matrices-blocs précédentes en remarquant, qu'à l'exception de la matrice C, les autres matrices sont blocs-triangulaires. Il vient en considérant les déterminants des matrices blocs-triangulaires (voir (1.13) du cours, chaque déterminant d'une telle matrice est égal au produit des déterminants des matrices blocs-diagonale) dans les relations (9) et (10) :

$$\mu^n det(C) = \mu^n det(\mu^2 I - BA),$$

et

$$\mu^n det(C) = \mu^n det(\mu^2 I - AB).$$

soit $det(\mu^2 I - BA) = det(\mu^2 I - AB)$ si $\mu \neq 0$. En posant $\mu^2 = \lambda$ on a $det(\lambda I - BA) = det(\lambda I - AB)$, les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres λ.

Exercice 3

Pour la matrice A_1, les b_i (resp. c_i et a_i) sont tous égaux à 2 (resp. -1). Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 2$.

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 4 - 1 = 3$ puis $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.3 - 2 = 4$. Supposons donc que $\delta_i = i + 1$ pour $i \leq k - 1$, on a $\delta_k = 2k - (k-1) = k + 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, donc $\delta_n = n + 1$.

Pour la matrice A_2, on voit que les b_i sont tous égaux à 2 à l'exception de $b_1 = 1$ et que les c_i et a_i sont tous égaux à -1. Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 1$.

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 2 - 1 = 1$ puis $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.1 - 1 = 1$. Supposons donc que$\delta_i = 1$ pour $i \leq k - 1$, on a $\delta_k = 2.1 - 1 = 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, donc $\delta_n = 1$.

Pour la matrice A_3, on voit que les b_i sont tous égaux à 2 à l'exception de $b_1 = 1$ et $b_n = 1$, et que les c_i et a_i sont encore tous égaux à -1. Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ jusqu'à $k = (n-1)$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 1$. Ensuite pour $k = n$, puisque $b_n = 1$, il faudra estimer $\delta_n = \delta_{n-1} - \delta_{n-2}$

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 2 - 1 = 1$ et $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.1 - 1 = 1$. Supposons donc que $\delta_i = 1$ pour $i \leq k - 1$, on a immédiatement $\delta_k = 2.1 - 1 = 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq (n-1)$. Finalement pour $k = n$, on a $\delta_n = 1\delta_{n-1} - \delta_{n-2} = 1.1 - 1 = 0$. La matrice A_3 est singulière.

Exercice 4

Trouver la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ ou de $x^2 = x + 1$, revient à trouver le point fixe de l'équation $x = F(x)$ avec $F(x) = \sqrt{x+1}$. On sait (théorème 3.1 du cours) que la méthode de Picard converge si F est une contraction lipschitzienne. Or $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $J = [0, \infty[$. On peut donc partir d'un point arbitraire sur J pour converger vers le point fixe, ou la racine, a satisfaisant à $a = \sqrt{1+a}$.

Le processus itératif s'écrit $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+\sqrt{1+x_{n-1}}}$. On a donc la convergence des itérés vers $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.

On remarque que la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est une équation banale du second degré, est $a = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803...$.

Exercice 5

i) On se donne une matrice A triangulaire supérieure d'ordre n. Considérons le produit de A par son inverse B, on a $AB = I$ avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ soit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Notons que la matrice A est inversible par hypothèse, comme elle est triangulaire supérieure son déterminant non nul est égal au produit des éléments diagonaux et donc $a_{i,i} \neq 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

Commençons par identifier les termes de la dernière ligne du produit AB. Puisque la matrice A est triangulaire supérieure, pour le terme $(AB)_{n,1}$, on a $(AB)_{n,1} = a_{n,n}b_{n,1} = 0$ soit $b_{n,1} = 0$ car $a_{n,n} \neq 0$. De même, en considérant $(AB)_{n,k}$ pour $2 \leq k \leq (n-1)$, on voit que $(AB)_{n,k} = a_{n,n}b_{n,k} = 0$ d'où $b_{n,k} = 0$. Enfin on a $(AB)_{n,n} = a_{n,n}b_{n,n} = 1$ soit $b_{n,n} \neq 0$. Le seul terme non nul de la dernière ligne de B est $b_{n,n}$.

Considérons ensuite l'avant-dernière ligne du produit AB. On a $(AB)_{n-1,1} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} + a_{n-1,n}b_{n,1} = 0$ avec, on vient de le voir, $b_{n,1} = 0$. Comme $a_{n-1,n-1} \neq 0$ on a donc $b_{n-1,1} = 0$. De même tous les termes de la $(n-1)^e$ ligne du produit AB sont nuls jusqu'à la $(n-2)^e$ colonne. Calculons $(AB)_{n-1,n-1} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} + a_{n-1,n}b_{n,n-1} = 1$ avec $b_{n,n-1} = 0$, on a donc $b_{n-1,n-1} \neq 0$. Enfin le dernier terme de cette ligne est $(AB)_{n-1,n} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,n} + a_{n-1,n}b_{n,n} = 0$, mais il ne décide en rien de la structure de B. De proche en proche , par une récurrence montante, la structure triangulaire supérieure de B apparait. Observons pour terminer le terme $(AB)_{2,1}$. On a $(AB)_{2,1} = a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b3,1 + \cdots + a_{2,n}b_{n,1} = 0$, or on sait maintenant que $b_{i,1} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$, donc $(AB)_{2,1} = a_{2,2}b_{2,1}$ avec $(AB)_{2,1} = 0$ et $a_{2,2} \neq 0$, donc $b_{2,1} = 0$. La matrice B est bien triangulaire supérieure.

Remarque : La démonstration montre que $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$. □

ii) Notons que la matrice A est inversible par hypothèse, comme elle est triangulaire inférieure son déterminant non nul est égal au produit des éléments diagonaux et donc $a_{i,i} \neq 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Considérons la matrice B telle que $BA = I$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & O \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

On pourrait faire un raisonnement semblable au $i)$, mais cette fois-ci en faisant une identification, par une récurrence descendante, en commençant par la première ligne du produit matriciel BA. Il est plus astucieux de prendre les transposées des deux membres de l'équation $BA = I$. On a $(BA)^T = A^T B^T = I$ (voir (1.5) du cours), A^T est triangulaire supérieure puisque A est triangulaire inférieure. On est ramené au cas précédent. La matrice B^T est donc triangulaire supérieure, ce qui entraîne que B est triangulaire inférieure. Ce qui conclut.

Remarque : D'après la remarque précedente $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$. Cela implique que si la matrice triangulaire inférieure est de type "Gauss", avec des "1" sur la diagonale principale, son inverse aura aussi des "1" sur sa diagonale principale. □

iii) C'est un simple produit de matrices. Notons $(L_1)_{i,j}$ (resp. $(L_2)_{i,j}$) les éléments de L_1 (resp. L_2). Calculons la première colonne du produit. On a, $(L_1L_2)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n}(L_1)_{i,k}(L_2)_{k,1}$ comme tous les éléments de la i^e ligne de L_1 sont nuls à l'exception de $(L_1)_{i,1}$ et de $(L_1)_{i,i} = 1$, on a $(L_1L_2)_{i,1} = (L_1)_{i,1}.1 + 1.0 = (L_1)_{i,1}$. Calculons la deuxième colonne : $(L_1L_2)_{i,2} = \sum_{k=1}^{n}(L_1)_{i,k}(L_2)_{k,2}$, le seul élément non nul de la somme est $1.(L_2)_{i,2}$ donc $(L_1L_2)_{i,2} = (L_2)_{i,2}$. Les $(n-2)$ dernières colonnes du produit sont celles de L_2 (ou de L_1).

Enfin soit le produit L_2L_1, en calculant la première colonne de ce produit on voit que $(L_2L_1)2, 1 = (L_2)_{2,1}$ puis $(L_2L_1)i, 1 = (L_2)_{i,2}(L_1)_{2,1} + (L_1)_{i,1}$. La première colonne est une combinaison de termes de L_1 et L_2. Les autres colonnes du produitsont identiques à celles de L_2.

Exercice 6

i) Soit (v, w) le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. i) Soit P la matrice $I + vw^T$. On suppose $v \neq 0$, sinon $vw^T = 0$ et $det(I + vw^T) = det(I) = 1$, le résultat est évident.

Soit x un vecteur propre de P associé à une valeur propre λ. Supposons que x n'est pas orthogonal à w, on a

$$(I + vw^T)x = \lambda x,$$

soit

$$vw^T x = (\lambda - 1)x, \tag{14}$$

ou encore, en posant $\mu = w^T x$ (un produit scalaire de vecteurs est évidemment un scalaire),

$$\mu v = (\lambda - 1)x,$$

et donc x est un multiple de v. Si $x = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (14) implique $v(w^T v) = (\lambda - 1)v$ soit

$$v(1 + w^T v) = \lambda v. \tag{15}$$

Comme le vecteur propre est un multiple du vecteur v, le sous-espace propre est de dimension un, sa valeur propre associée a une multiplicité géomètrique et algèbrique (voir paragraphe 1.1.5 du cours) égale à un et (15) montre qu'elle vaut $1 + w^T v = 1 + (v, w)$.

Sinon, si x est orthogonal à w, la relation (14) entraîne que $\lambda = 1$. Comme le sous-espace orthogonal à w est un sous-espace de dimension $(n-1)$, la valeur propre "I" est de multiplicité $(n-1)$. Comme $det(P) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(P)$, on a

$$det(P) = 1 + (v, w). \tag{16}$$

ii) La matrice A étant régulière, on peut écrire $(A + uv^T) = A(I + A^{-1}uv^T)$. Comme le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, on a $det(A + uv^T) = det(A)det(I + A^{-1}uv^T)$ donc, comme la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $det(A + uv^T) \neq 0$, $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $det(I + A^{-1}uv^T) \neq 0$. Or, d'après (16), $det(I + A^{-1}uv^T) = 1 + (v, A^{-1}u)$. Ce qui conclut : la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + (v, A^{-1}u) \neq 0$.

iii) Comme la matrice $(A+uv^T)$ est régulière on a $\sigma \neq 0$, et on peut considérer la matrice $A^{-1}-(1/\sigma)A^{-1}uv^TA^{-1}$. Calculons le produit de cette matrice par $(A+uv^T)$. On a

$$E = (A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^TA^{-1})(A+uv^T),$$

soit en développant

$$E = I - (1/\sigma)A^{-1}uv^T + A^{-1}uv^T - (1/\sigma)A^{-1}u(v^TA^{-1}u)v^T. \tag{17}$$

Par la définition de σ, on a $v^TA^{-1}u = \sigma - 1$, en portant cette expression dans (17) on constate que $E = I$. Ce qui conclut. □

