Mathématiques L3– Examen partiel du 18/11/09

Tous les exercices sont indépendants et ont pour objectif de vous faire manipuler les notions du cours. Le minutage est évidemment indicatif, il laisse 10mn de relecture.

Exercice 1 (15 mn)

Calculer par la méthode du point fixe de Picard, en la justifiant, la racine positive a de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Pour démarrer la méthode on pourra partir d'un point arbitraire $x_0 \in J = [0, \infty[$.

Vérifier que l'on peut écrire de façon "amusante" $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$. Donner une expression algèbrique de a.

N.B. : a est appelé le *nombre d'or*. Pour information $a = 1.61803...$.

Exercice 2 (50 mn)

On considère la fonction f que l'on veut intégrer sur l'intervalle $[a, b]$.

1) Rappeler la formule des trapèzes dans le cas où nous choisissons un maillage régulier de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n$. Vérifier que la formule des trapèzes est exacte pour les constantes et les polynômes de degré un et qu'elle est inexacte pour les polynômes de degré deux.
2) On pose $h = x_{i+1} - x_i$, sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ écrire l'erreur $e_i(h)$ commise en calculant l'intégrale à l'aide de la formule du trapèze.
3) On veut déterminer dans la suite $e_i(h)$. Pour simplifier l'écriture on pose $a = x_i$ et $b = x_{i+1}$, d'où $h = b - a$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral. Soit $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t) f''(t) dt.$$

Vérifier, dans un premier temps, que l'on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^b (x - t)_+ f''(t) dt,$$

avec la convention

$$(x - t)_+ = \begin{cases} (x - t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}. \tag{1}$$

On introduit ensuite l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L} : f \to \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)),$$

prouver que

$$\mathcal{L}(f) = \int_a^b f''(t) K(t) dt,$$

avec

$$K(t) = \mathcal{L}_x[(x - t)_+^n],$$

où la notation $\mathcal{L}_x[(x-t)_+]$ signifie que la fonctionnelle $\mathcal{L}$ est appliquée à la fonction $(x-t)_+$ considérée comme fonction de x.
Vérifier que

$$K(t) = \frac{(b-t)(a-t)}{2}.$$

4) On rappelle le théorème de la moyenne suivant :
Théorème : Soient $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ et une fonction g intégrable sur $[a,b]$ et de signe constant sur $[a,b]$, alors il existe au moins un $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \ \square$$

En utilisant ce théorème, montrer que

$$e_i(h) = -\frac{h^3}{12}f''(c), \quad c \in [a,b]. \tag{2}$$

Contrôler que l'ordre de la méthode des trapèzes est seulement d'ordre un.

Exercice 3 (15 mn)

Calculer la solution générale de l'équation $t\dot{x} = x + t^2$.

Indication : On pourra considérer l'opération $f \to tf' - f$ et remarquer que l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est stable pour cette opération.

Exercice 4 (30 mn)

L'objectif de cet exercice est de montrer que le calcul explicite des solutions d'une équation différentielle est souvent non trivial. Cet exercice donne les premières étapes du calcul d'une telle solution. Soit l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' + (-2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})y = 0,$$

définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
1) Montrer que $f(x) = \frac{e^x}{x}$ est une solution particulière de cette équation différentielle du second ordre.
2) On note par λ une fonction telle $y = \lambda f$. Prouver que λ' est solution d'une équation du premier ordre.
N.B. : En posant $\omega = \lambda'$, en résolvant l'équation précédente en ω, puis en calculant une primitive de ω on obtient λ et la solution cherchée par $y = \lambda f$. $\square$