# Mathématiques L3– Examen partiel du 13/11/08

*Tous les exercices sont indépendants et ont pour objectif de vous faire manipuler les notions du cours. Les seuls exercices un peu délicats sont les exercices 2 et 5, des suggestions devraient vous aider.Le minutage est évidemment indicatif.*

## Exercice 1

i) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Cette matrice est-elle orthogonale ?

ii) Soit la matrice

$$S = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}. \tag{2}$$

1) Calculer les valeurs propres de $S$.

2) Calculer les vecteurs propres $v_1 = (1, -i)$ et $v_2 = (1, i)$ associés (on rappelle qu'ils sont définis à une constante près). Montrer qu'ils sont orthogonaux. Comment peut-on les orthonormaliser ?

iii) Soit la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

1) Calculer les valeurs propres de $A$.

2) Montrer que la matrice des vecteurs propres (les colonnes sont ces vecteurs propres) est

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Vérifier que les vecteurs propres sont orthonormalisés.

3) Vérifier que $S^T = S^{-1}$.

## Exercice 2 (25 mn)

Soient deux matrices carrées d'ordre $n$, montrer que $det(\lambda I - BA) = det(\lambda I - AB)$. Les valeurs propres non nulles des deux matrices $AB$ et $BA$ sont les mêmes.

*Indication :* On pourra considérer les produits matriciels

$$\left( \begin{array}{c|c} \mu I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array} \right) \tag{5}$$

et

$$\left( \begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array} \right). \tag{6}$$

## Exercice 3 (15 mn)

Les matrices $A_1$, $A_2$ et $A_3$ de cet exercice, exhibées respectivement par (10), (11) et (12) sont les matrices de discrétisation par la méthode aux différences finies de l'opérateur $-\frac{d^2u}{dx^2}$. Ces matrices correspondent à une discrétisation avec un pas constant $h$, au facteur $\frac{1}{h^2}$ près, de cet opérateur. La matrice $A_1$ est associée à un problème de Dirichlet homogène (valeurs nulles de la solution au bord du domaine : par exemple si le domaine est l'intervalle $[0,1]$ le bord est l'ensemble $\{0,1\}$ et on impose à la solution de satisfaire aux conditions $u(0) = u(1) = 0$. La matrice $A_2$ est associée aux conditions $\frac{du}{dx}(0) = 0$ (dite de Neumann homogène) et $u(1) = 0$. Enfin la matrice $A_3$ est associée à une condition de Neumann homogène aux deux bouts $\frac{du}{dx}(0) = 0$ et $\frac{du}{dx}(1) = 0$ . Soit la matrice tridiagonale

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{vmatrix}. \tag{7}$$

On définit la suite

$$\begin{aligned} &\delta_0 = 1, \\ &\delta_1 = b_1, \\ &\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2} \ , \ 2 \le k \le n. \end{aligned} \tag{8}$$

Alors on a (voir cours) $\delta_k = \det(\Delta_k)$, avec

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & & a_k & b_k \end{vmatrix}, 1 \le k \le n. \tag{9}$$

– On considère la matrice tridiagonale d'ordre $n$ suivante

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Montrer que $det(A_1) = n + 1$.

– On considère la matrice tridiagonale d'ordre $n$ suivante

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Montrer que $det(A_2) = 1$.

– On considère la matrice tridiagonale d'ordre $n$ suivante

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Montrer que la matrice $A_3$ est singulière, $det(A_3) = 0$.

**Remarque :** Les matrices $A_1$ et $A_2$ étant régulières, les problèmes continus associés, $-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$ (+ conditions limites correspondantes), ont une solution unique. Par contre, la matrice $A_3$ étant singulière, le problème continu associé (condition de Neumann homogène aux deux bouts) n'a plus de solution unique même si elle existe. On perd l'unicité. □

## Exercice 4 (10 mn)

Calculer par la méthode du point fixe de Picard, en la justifiant, la racine positive $a$ de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Pour démarrer la méthode on pourra partir d'un point arbitraire $x_0 \in J = [0, \infty[$.

Vérifier que l'on peut écrire de façon "amusante" $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$. Donner une expression algèbrique de $a$.

**N.B. :** $a$ est appelé le *nombre d'or*. Pour information $a = 1.61803...$.

## Exercice 5 (15 mn)

i) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
ii) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est aussi triangulaire inférieure.
iii) Justifier que le produit $L_1 L_2$ de deux matrices colonnes triangulaires inférieures $L_1$ et $L_2$, du type rencontré dans la mise en oeuvre de la méthode de Gauss (voir Figure 1), est décrit comme à la Figure. La diagonale principale de ces matrices est constituée de "1". La première (resp. deuxième) colonne du produit est constituée de la colonne de $L_1$ (resp. $L_2$).

Que se passe-t-il si l'on fait le produit $L_2 L_1$ ?

 

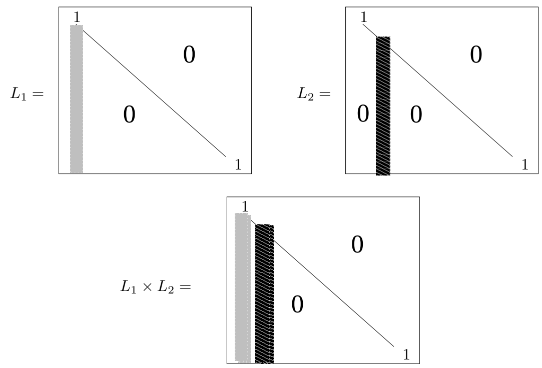


FIG. 1 – Produit $L_1 L_2$.

## Exercice 6 (25 mn)

On note $(v, w)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
i) Soit $v$ et $w$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $det(I + vw^T) = 1 + (v, w)$.
ii) On suppose la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ régulière. En déduire que la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + (v, A^{-1}u) \neq 0$
iii) Vérifier que $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^T A^{-1}$.

*Indication :* Le $i)$ est trivial si $v = 0$, aussi on supposera que $v \neq 0$. On définit la matrice $P$ par $P = I + vw^T$. On pourra montrer que tout vecteur propre $x$ de $P$ est ou non orthogonal à $w$. S'il n'est pas orthogonal à $w$ on pourra montrer qu'il est multiple de $v$. Dans chaque cas on pourra exhiber la valeur propre associée à $x$, avec son ordre de multiplicité, pour finalement en déduire $det(P)$. $\square$