Mathématiques L3– Correction de l'examen partiel du 13/11/08

Tous les exercices sont indépendants et ont pour objectif de vous faire manipuler les notions du cours. Les seuls exercices un peu délicats sont les exercices 2 et 5, des suggestions devraient vous aider.Le minutage est évidemment indicatif.

Exercice 1 (30 mn)

i) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Cette matrice est-elle orthogonale ?
Une matrice orthogonale réelle A est une matrice vérifiant $A^T A = AA^T = I$. Comme ici $A = A^T$, il suffit donc de vérifier que $A^2 \neq I$. Or

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Comme $A^2 \neq I$, la matrice A n'est pas orthogonale.
ii) Soit la matrice

$$S = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}. \tag{3}$$

1) Calculer les valeurs propres de S.
Exhibons la matrice $S - \lambda I$

$$S = \begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire de $det(S - \lambda I) = (\cos t - \lambda)^2 + \sin^2 t = \lambda^2 - 2\lambda \cos t + 1$. Les racines sont $\lambda_\pm = \cos t \pm \sin t = e^{\pm it}$.
2) Calculer les vecteurs propres $v_1 = (1, -i)$ et $v_2 = (1, i)$ associés (on rappelle qu'ils sont définis à une constante près). Montrer qu'ils sont orthogonaux. Comment peut-on les orthonormaliser ?
Soit $v_2 = (x_1, x_2)^T$ le vecteur propre associé à la valeur propre e^{it}. On a $Sv_2 = e^{it} v_2$, soit

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = e^{it} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

ou encore

$$\begin{cases} \cos t\, x_1 - \sin t\, x_2 = (\cos t + i \sin t) x_1 \\ \sin t\, x_1 + \cos t\, x_2 = (\cos t + i \sin t) x_2 \end{cases}. \tag{6}$$

Il vient

$$\begin{cases} -x_2 \ \sin t = i x_1 \ \sin t \\ x_1 \ \sin t = i x_2 \ \sin t \end{cases}. \tag{7}$$

Comme un vecteur propre est déterminé à une constante près, on peut choisir $x_1 = 1$, alors l'équation (7) donne $x_2 = -i$.
De même soit $v_1 = (y_1, y_2)^T$ le vecteur propre associé à la valeur propre e^{-it}. On est amené à considérer le système

$$\begin{cases} \cos t\, x_1 - \sin t\, x_2 = (\cos t - i \sin t) x_1 \\ \sin t\, x_1 + \cos t\, x_2 = (\cos t - i \sin t) x_2 \end{cases}. \tag{8}$$

d'où

$$\begin{cases} -x_2 \ \sin t = -ix_1 \ \sin t \\ x_1 \ \sin t = -ix_2 \ \sin t \end{cases}. \tag{9}$$

Comme un vecteur propre est déterminé à une constante près, on peut choisir $x_1 = 1$, alors l'équation (9) donne $x_2 = i$.

iii) Soit la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

1) Calculer les valeurs propres de A.
2) Montrer que la matrice des vecteurs propres (les colonnes sont ces vecteurs propres) est

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Vérifier que les vecteurs propres sont orthonormalisés.

3) Vérifier que $S^T = S^{-1}$.

Exercice 2 (25 mn)

Soient deux matrices carrées d'ordre n, montrer que $det(\lambda I - BA) = det(\lambda I - AB)$. Les valeurs propres non nulles des deux matrices AB et BA sont les mêmes.

Indication : On pourra considérer les produits matriciels

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right) \tag{12}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right). \tag{13}$$

Exercice 3 (15 mn)

Les matrices A_1, A_2 et A_3 de cet exercice, exhibées respectivement par (17), (18) et (19) sont les matrices de discrétisation par la méthode aux différences finies de l'opérateur $-\frac{d^2u}{dx^2}$. Ces matrices correspondent à une discrétisation avec un pas constant h, au facteur $\frac{1}{h^2}$ près, de cet opérateur. La matrice A_1 est associée à un problème de Dirichlet homogène (valeurs nulles de la solution au bord du domaine : par exemple si le domaine est l'intervalle $[0, 1]$ le bord est l'ensemble $\{0, 1\}$ et on impose à la solution de satisfaire aux conditions $u(0) = u(1) = 0$. La matrice A_2 est associée aux conditions $\frac{du}{dx}(0) = 0$ (dite de Neumann homogène) et $u(1) = 0$. Enfin la matrice A_3 est associée à une condition de Neumann homogène aux deux bouts $\frac{du}{dx}(0) = 0$ et $\frac{du}{dx}(1) = 0$. Soit la matrice tridiagonale

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{vmatrix}. \tag{14}$$

On définit la suite

$$\begin{aligned} &\delta_0 = 1, \\ &\delta_1 = b_1, \\ &\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2} \;\;,\; 2 \leq k \leq n. \end{aligned} \tag{15}$$

Alors on a (voir cours) $\delta_k = \det(\Delta_k)$, avec

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & & & a_k & b_k \end{vmatrix}, 1 \leq k \leq n. \tag{16}$$

- On considère la matrice tridiagonale d'ordre n suivante

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

  Montrer que $det(A_1) = n + 1$.
- On considère la matrice tridiagonale d'ordre n suivante

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

  Montrer que $det(A_2) = 1$.

– On considère la matrice tridiagonale d'ordre n suivante

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Montrer que la matrice A_3 est singulière, $det(A_3) = 0$.

Remarque : Les matrices A_1 et A_2 étant régulières, les problèmes continus associés, $-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$ (+ conditions limites correspondantes), ont une solution unique. Par contre, la matrice A_3 étant singulière, le problème continu associé (condition de Neumann homogène aux deux bouts) n'a plus de solution unique même si elle existe. On perd l'unicité. □

Exercice 4 (10 mn)

Calculer par la méthode du point fixe de Picard, en la justifiant, la racine positive a de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Pour démarrer la méthode on pourra partir d'un point arbitraire $x_0 \in J = [0, \infty[$.

Vérifier que l'on peut écrire de façon "amusante" $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$. Donner une expression algèbrique de a.

N.B. : a est appelé le *nombre d'or*. Pour information $a = 1.61803...$.

Exercice 5 (15 mn)

i) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
ii) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est aussi triangulaire inférieure.
iii) Justifier que le produit L_1L_2 de deux matrices colonnes triangulaires inférieures L_1 et L_2, du type rencontré dans la mise en oeuvre de la méthode de Gauss (voir Figure 1), est décrit comme à la Figure. La diagonale principale de ces matrices est constituée de "1". La première (resp. deuxième) colonne du produit est constituée de la colonne de L_1 (resp. L_2).

Que se passe-t-il si l'on fait le produit L_2L_1 ?

Exercice 6 (25 mn)

On note (v, w) le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
i) Soit v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $det(I + vw^T) = 1 + (v, w)$.
ii) On suppose la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ régulière. En déduire que la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + (v, A^{-1}u) \neq 0$
iii) Vérifier que $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^TA^{-1}$.

Indication : Le $i)$ est trivial si $v = 0$, aussi on supposera que $v \neq 0$. On définit la matrice P par $P = I + vw^T$. On pourra montrer que tout vecteur propre x de P est ou non orthogonal à w. S'il n'est pas orthogonal à w on pourra montrer qu'il est multiple de v. Dans chaque cas on pourra exhiber la valeur propre associée à x, avec son ordre de multiplicité, pour finalement en déduire $det(P)$. □

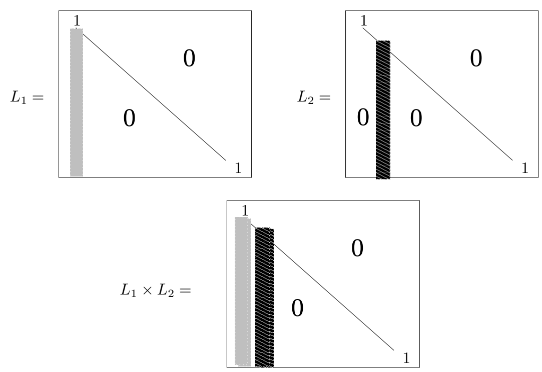

FIG. 1 – Produit $L_1 L_2$.