

**Solutions stationnaires : définition et caractérisation des  
points de bifurcation col et fourche (ou transcritique)**

Le 29 novembre 2012

Jean Roux

**Atelier Modélisation**

**CERES/ERTI**

**Année 2012-2013, 1er semestre**

École normale supérieure, Paris

## 1.1 Définition des points de bifurcation col et fourche

Il s'agit de répondre à la question de savoir comment un observateur voyageant sur une branche de solutions stationnaires peut distinguer un point limite d'un point de bifurcation. Il y a une grande différence entre un point de bifurcation de type col (c'est la bifurcation la plus simple possible) - on dit aussi point de retournement en mécanique des solides, ou point limite, ou "tipping point" par les géophysiciens, ou encore "pli" selon la terminologie de la théorie des catastrophes de René Thom - et un point de bifurcation de type fourche (ou transcritique).

### 1.1.1 Exemple préliminaire

Considérons les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} 0 = 1 + \lambda(y_1^2 + y_2^2 - 1) = f_1(y_1, y_2, \lambda) \\ 0 = 10y_2 - \lambda y_2(1 + 2y_1^2 + y_2^2) = f_2(y_1, y_2, \lambda) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

- 1) Calculer tous les points critiques du système.
- 2) Calculer et évaluer la matrice jacobienne et la dérivée  $f_\lambda$  en un point limite et en un point de bifurcation. Observer que la matrice jacobienne est singulière pour les deux types de points critiques.
- 3) Considérer la matrice constituée de la matrice jacobienne à laquelle on ajoute le vecteur  $f_\lambda$  comme dernière colonne. Déterminer le rang de la matrice "augmentée" pour un point limite et un point de bifurcation.

**Solution** 1) La seconde équation est satisfaite pour  $y_2 = 0$  et la première équation entraîne alors que  $y_1^2 = (\lambda - 1)/\lambda$ . D'où l'existence de deux branches

$$(y_1, y_2) = \left\{ \pm((\lambda - 1)/\lambda)^{1/2}, 0 \right\}$$

qui sont définies pour  $\lambda \geq 1$  et  $\lambda < 0$ . Il reste à discuter du cas  $y_2 \neq 0$ . Substituons l'expression  $y_1^2 + y_2^2 = 1 - 1/\lambda$  de la première dans la seconde équation. Il vient après division par  $y_2$

$$0 = 10 - \lambda(1 + y_1^2 + 1 - \frac{1}{\lambda}) = 11 - 2\lambda - \lambda y_1^2,$$

soit

$$y_1 = \pm \left( \frac{11 - 2\lambda}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

Par conséquent  $y_2^2 = 1 - 1/\lambda - (11 - 2\lambda)/\lambda = (3\lambda - 12)/\lambda$  et on a  $y_2 = \pm((3\lambda - 12)/\lambda)^{1/2}$ .

Nous avons donc comme branches additionnelles

$$(y_1, y_2) = \left( \pm \left( \frac{11 - 2\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}, \pm \left( \frac{3\lambda - 12}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

définies pour  $4 \leq \lambda \leq 5.5$ . Ces branches forment une boucle régulière dans l'espace  $(y_1, y_2, \lambda)$ . La Figure 1.1 montre toutes les branches des solutions.

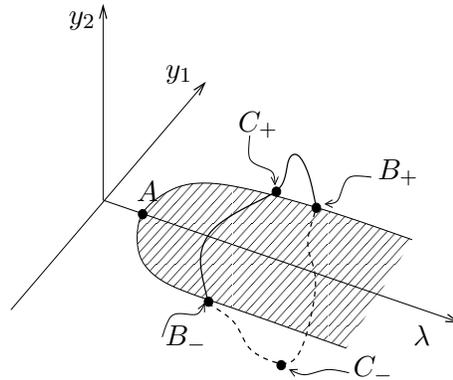


Figure 1.1: Diagramme de bifurcation pour  $\lambda > 1$ , en traits pleins pour  $y_2 \geq 0$  et en tirets pour  $y_2 < 0$ . Les branches de solutions sont symétriques par rapport aux plans définis par  $y_1 = 0$  et  $y_2 = 0$ . Le plan  $y_2 = 0$  est hachuré par des traits parallèles.

Nous avons clairement deux points de bifurcation et trois points limites. Plus précisément on a :

- $A = (0, 0, 1)$  point limite.
- $B_{\pm} = (\pm\sqrt{3}/2, 0, 4)$  points de bifurcation (en effet si  $\lambda = 4$  et  $y_2 = 0$  alors  $y_1 = \pm\sqrt{3}/2$ ).
- Enfin si  $\lambda = 5.5$  alors  $y_1 = 0$  et  $y_2 = \pm\sqrt{9/11} = \pm 3(11)^{-1/2}$ .

C'est-à-dire que  $C_{\pm} = (0, \pm 3(11)^{-1/2}, 5.5)$  sont des points limites, car pour  $\lambda \in [4, 5.5]$  nous avons deux valeurs de  $y_1$ , à la fois sur la demi-boucle  $y_2 > 0$  et sur la demi-boucle  $y_2 < 0$ .

2) Calculons la matrice jacobienne du système et la dérivée  $f_{\lambda}$ . Nous avons

$$f_y(y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda y_1 & 2\lambda y_2 \\ -4\lambda y_1 y_2 & 10 - \lambda - 2\lambda y_1^2 - 3\lambda y_2^2 \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

et

$$f_{\lambda}(y, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 - 1 \\ -y_2(1 + 2y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Évaluons la matrice jacobienne et la dérivée en un point de bifurcation et un point limite.

Pour le point de bifurcation  $(\sqrt{3}/2, 0, 4)$  on a

$$f_y = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_\lambda = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.4)$$

Pour le point limite  $(0, 3(11)^{-1/2}, 5.5)$  on a

$$f_y = \begin{pmatrix} 0 & 3(11)^{1/2} \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_\lambda = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -60(11)^{-3/2} \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

Observons déjà que la matrice jacobienne est singulière (en effet, en un point de bifurcation on perd la possibilité, par le théorème des fonctions implicites, d'exprimer la solution en fonction du paramètre) dans les deux cas, c'est-à-dire que son rang est strictement inférieur à deux ou, de façon équivalente que  $\det(f_y(y_0, \lambda_0)) = 0$  si  $(y_0, \lambda_0)$  désigne indifféremment un point limite ou un point de bifurcation où  $y_0$  est un vecteur de dimension  $n$ . Dans cet exemple on a  $n = 2$ . La singularité de la matrice jacobienne ne permet pas de distinguer ces deux types de points.

3) Attachons le vecteur  $f_\lambda$  à la matrice jacobienne. Pour le point de bifurcation (resp. point limite) on obtient la matrice "augmentée"

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3(11)^{1/2} & -2/11 \\ 0 & -9 & -60(11)^{-3/2} \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

La matrice (augmentée) au point de bifurcation est toujours de rang inférieur à  $n$ , tandis que celle du point limite a le rang  $n$ . On vérifie en effet que

$$\det \begin{pmatrix} 3(11)^{1/2} & -2/11 \\ -9 & -60(11)^{-3/2} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.1.7)$$

□

### 1.1.2 Système en dimension $n$ quelconque

Même s'il y a des similitudes dans le diagramme de bifurcation, observons donc qu'il y a une grande différence entre un point de bifurcation de type col et un point de bifurcation type fourche. L'étude précédente permet d'anticiper les définitions précises d'un point limite et d'un point de bifurcation. Les observations faites à propos d'un point limite et d'un point de bifurcation, dans cet exemple, exigent cependant une analyse plus approfondie. La mise en œuvre informatique des méthodes de continuation de calcul des branches de solution, nécessitent évidemment une caractérisation algébrique des différents types possibles de bifurcation.

Considérons un système de  $n$  équations non linéaires du type  $f(x, \mu) = 0$ . Il est loisible de considérer  $\mu$  comme la  $(n + 1)^e$  composante du vecteur  $x$ ,

c'est-à-dire de poser  $x_{n+1} = \mu$  et de considérer que l'on a affaire à un système de  $n$  équations à  $(n + 1)$  inconnues, soit

$$0 = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La matrice rectangulaire des dérivées partielles consiste en  $(n+1)$  colonnes  $z_i$ , soit

$$(f_x | f_\mu) = (z^1 | z^2 | \dots | z^n | z^{n+1}), \quad (1.1.8)$$

où

$$f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mu} \end{pmatrix}. \quad (1.1.9)$$

Nous sommes libres de considérer chacune des  $(n + 1)$  variables  $x_j$  (à savoir la  $k^e$ ) des fonctions  $f_i$  comme un paramètre. Choisissons  $x_k$  et appelons  $\gamma$  ce nouveau paramètre. La dépendance en  $\gamma$  des  $n$  variables restantes  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$  est caractérisée par la “nouvelle” matrice jacobienne obtenue en enlevant la  $k^e$  colonne de (1.1.8) : cela résulte du théorème des fonctions implicites qui permet d'exprimer les  $n$  variables restantes en fonction de  $\gamma$  si la “nouvelle” matrice jacobienne est régulière. Pour un point limite il est possible de trouver un indice  $k$  tel que ce nouveau jacobien soit régulier (de rang égal à  $n$ ), tandis que pour un point de bifurcation un tel indice  $k$  n'existe pas (le rang est inférieur à  $n$  pour tout choix de  $\gamma$ ).

Cet échange de colonnes dans (1.1.8) a une interprétation géométrique saisissante. Le changement du paramètre  $\mu = x_{n+1}$  en le paramètre  $\gamma = x_k$  signifie que le diagramme de branchement  $[x] = \mu = x_{n+1}$ <sup>1</sup> en fonction de  $\gamma = x_k$  est obtenu à partir du diagramme  $\mu = x_{n+1} \rightarrow [y] = \gamma$  par une rotation de  $90^\circ$  (Figure 1.2)

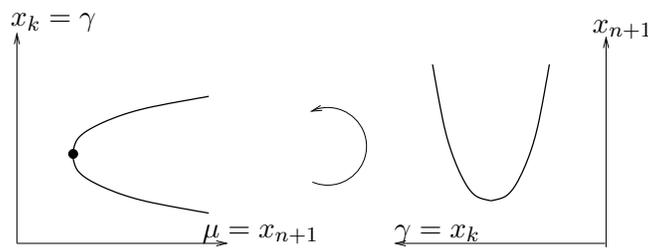


Figure 1.2: Le point limite n'existe plus lorsque la branche est paramétrisée par  $\gamma = x_k$ .

<sup>1</sup> $[y]$  désigne une mesure scalaire de la solution  $y = (y_1, \dots, y_n)$  qui n'est pas nécessairement une norme. Cette mesure est cruciale à la bonne lecture des phénomènes de bifurcation. En pratique il faut s'efforcer de trouver un  $[y]$  qui mette en évidence autant de propriétés des branches de solutions individuelles que possible.

Cette disparition de la singularité (dans le cas d'un point limite) par changement de paramètre est reflétée algébriquement par la non singularité de la "nouvelle" matrice jacobienne. Avec ce nouveau choix de paramètre le théorème des fonctions implicites peut à nouveau s'utiliser.

En essayant le même échange de paramètre avec la matrice associée à un point de bifurcation, nous obtenons la Figure 1.3. Le point de bifurcation demeure.

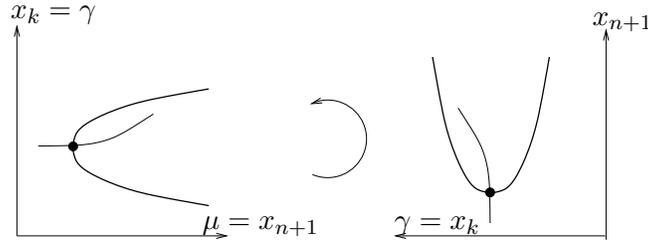


Figure 1.3: Le point de bifurcation persiste par rotation, lorsque la branche est paramétrisée par  $\gamma = x_k$ .

La préservation ou l'accroissement du rang par l'adjonction de la colonne  $f_\mu$  à la matrice jacobienne  $f_x$  peut être décrit par le truchement de l'image d'une matrice. Supposons que le rang du jacobien  $f_x$  soit  $(n - 1)$  (ce qui est vrai pour les deux types de point). Considérons d'abord le cas d'un point de bifurcation. Comme la matrice  $(f_x|f_\mu)$  est singulière, on peut donc supposer qu'il existe des constantes  $\alpha_i$  telles que  $f_\mu = z_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i$ . Ceci signifie que  $f_\mu \in \text{Im}(f_x)$ , car les  $z^i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , génèrent l'image de  $f_x$ . A contrario pour un point limite il n'existe pas de telles constantes  $\alpha_i$ , c'est-à-dire que  $f_\mu \notin \text{Im}(f_x)$ ; mais on vient de voir que  $f_\mu$  apporte l'information de "plein" rang que n'avait pas la matrice  $f_x$ : pour un point limite  $\text{rang}(f_x|f_\mu) = n$ .

### 1.1.3 Définitions

Nous pouvons maintenant donner les définitions suivantes d'un point limite - ou bifurcation col - et d'un point de bifurcation fourche.

**Définition 1.1.1.** *Le point  $(x_0, \mu_0)$  est un point limite simple si on a les quatre conditions suivantes :*

1.  $f(x_0, \mu_0) = 0$ ,
2.  $f_x(x_0, \mu_0) = 0$  a une valeur propre simple nulle ou, de façon équivalente,  $\text{rang}(f_x(x_0, \mu_0)) = n - 1$ ,
3.  $f_\mu(x_0, \mu_0) \notin \text{Im}(f_x(x_0, \mu_0))$ , c'est-à-dire que

$$\text{rang}(f_x(x_0, \mu_0)|f_\mu(x_0, \mu_0)) = n,$$

4. il y a une paramétrisation  $(x(\sigma), \mu(\sigma))$  avec  $x(\sigma_0) = y_0$  et  $\mu(\sigma_0) = \mu_0$  telle que  $d^2\mu(\sigma_0)/d\sigma^2 \neq 0$ .

Les hypothèses 1, 2 et 3 garantissent que la tangente à la branche en  $(x_0, \mu_0)$  est perpendiculaire à l'axe des  $\mu$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  des  $(x, \mu)$ . L'hypothèse 4 interdit que  $(x_0, \mu_0)$  soit un point d'hystérésis (Figure 1.4).

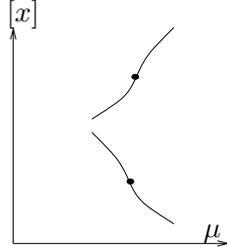


Figure 1.4: Points d'hystérésis.

**Définition 1.1.2.** Le point  $(x_0, \mu_0)$  est un point de bifurcation fourche (ou transcritique) simple si on a les quatre conditions suivantes :

1.  $f(x_0, \mu_0) = 0$ ,
2.  $f_x(x_0, \mu_0) = 0$  a une valeur propre simple nulle ou, de façon équivalente,  $\text{rang}(f_x(x_0, \mu_0)) = n - 1$ ,
3.  $f_\mu(x_0, \mu_0) \in \text{Im}(f_x(x_0, \mu_0))$ ,
4. Exactement deux branches se coupent avec deux tangentes distinctes.

### 1.1.4 Vérifications élémentaires en dimension un avec un paramètre

Soit l'équation

$$\dot{x} = f_1(x, \mu) = \mu - x^2.$$

On sait que pour  $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$  on a un point de bifurcation de type col (voir figure 1.5).

Vérifions la définition 1.1.1. Le 1. est évidemment vérifié :  $f_1(x_0, \mu_0) = 0$ . De plus  $\frac{df_1}{dx}(x_0, \mu_0) = -2x|_{(0,0)} = 0$ , donc  $\frac{df_1}{dx}$  a une valeur propre simple nulle au point de bifurcation, ce qui est l'hypothèse 2.. De plus  $\frac{df_1}{d\mu}(x_0, \mu_0) = 1$  et donc, comme  $\text{Im}((f_1)_x)(0, 0) = \{(f_1)_x(0, 0)x | x \in \mathbb{R}\} = 0$  on a  $\frac{df_1}{d\mu}(x_0, \mu_0) \notin \text{Im}((f_1)_x)(0, 0)$ , l'hypothèse 3. est vérifiée. Le 4. est évident géométriquement. La définition 1.1.1 d'un point limite (ou "pli") est satisfaite.

Considérons maintenant l'équation élémentaire

$$\dot{y} = f_2(x, \mu) = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2).$$

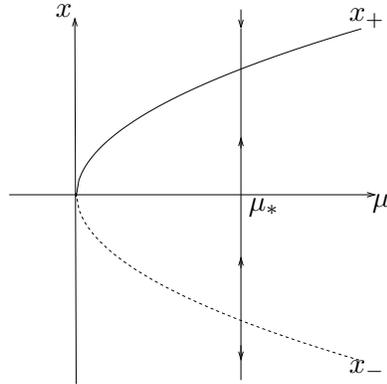


Figure 1.5: Points critiques  $x_-$  et  $x_+$  en fonction du paramètre. La branche associée à  $x_+$  est stable, celle associée à  $x_-$  est instable, tracée en pointillés. Pour une valeur particulière  $\mu_*$  de  $\mu$ , des flèches montrent la direction de déplacement de  $x$ , déterminée par le signe de  $\dot{x}$ .

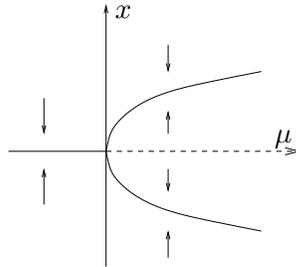


Figure 1.6: Les solutions stables (resp. instables) sont en traits pleins (resp. tirets) épaissis. L'origine est un point de bifurcation fourche sur-critique.

Elle possède l'équilibre trivial  $x = 0$  et, pour  $\mu > 0$ , deux équilibres non triviaux  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . On a un point de bifurcation de type fourche au point  $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$  (voir Figure 1.6). Vérifions la définition 1.1.2. Le 1. est évidemment vérifié :  $f_2(x_0, \mu_0) = 0$ . De plus  $\frac{df_2}{dx}(x_0, \mu_0) = (\mu - 3x^2)|_{(0,0)} = 0$ , donc  $\frac{df_2}{dx}$  a une valeur propre simple nulle au point de bifurcation, ce qui est l'hypothèse 2. De plus  $\frac{df_2}{d\mu}(x_0, \mu_0) = x_{(0,0)} = 0$  et donc, comme  $\text{Im}((f_2)_x)(0, 0) = \{(f_2)_x(0, 0)x | x \in \mathbb{R}\} = 0$  on a  $\frac{df_2}{d\mu}(x_0, \mu_0) \in \text{Im}((f_2)_x)(0, 0)$ , l'hypothèse 3. est vérifiée. Le 4. est évident géométriquement. On ferait les mêmes vérifications dans le cas d'une bifurcation transcritique avec  $f_3(x, \mu) = \mu x - x^2$  et  $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ . La définition 1.1.2 d'un point de bifurcation fourche ou transcritique est satisfaite.

On peut dire que les figures 1.5 et 1.6 sont des courbes "implicites", tirées respectivement des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

## 1.2 Remarques numériques et considérations générales

Évidemment, en pratique, dans les programmes de continuation permettant de suivre les solutions du problème en fonction d'un (ou de plusieurs) paramètre(s), il faut disposer d'algorithmes permettant de distinguer les deux types de points. Dans le cadre des méthodes de prédiction-corrrection de H.B. Keller utilisant l'abscisse curviligne, on dispose d'un critère (le "Bordering Lemma") permettant de faire la distinction algorithmique entre ces deux types de bifurcation. Pour seulement l'expliquer, il faut entrer au cœur des méthodes de continuation. C'est possible, mais c'est une autre affaire ...

Un autre point à souligner à propos des méthodes de calculs de branches de solutions est la nécessité du pilotage des calculs par l'utilisateur des programmes. Leur utilisation en "aveugle", en "boîte noire", expose à beaucoup d'incertitudes (saut sur une autre branche par exemple) et des phénomènes de bifurcation peuvent être escamotés. Par exemple, la partie "correction" de ces méthodes se fait usuellement, dans les programmes, par la méthode de Newton, qui ramène la solution prédite sur la fonction  $f(x, \mu) = 0$ . Or la convergence de la méthode de Newton est locale. Une mauvaise prédiction rend la correction problématique, d'où, généralement, la nécessité d'un pilotage à vue, parfois assez fin.

Pour les amateurs d'analyse numérique, il faut noter que ces méthodes de continuation sont assez consommatrices d'algorithmes : calcul de valeurs propres, méthode de Newton, interpolation de points pour la visualisation des courbes de bifurcation, etc ... De plus, des connaissances minimales dans la théorie des systèmes dynamiques sont évidemment souhaitables, ne serait-ce que pour interpréter correctement les résultats des calculs.