Corrections des exercices donnés au cours L3 de mathématiques du Département Géosciences le 13 octobre 2014. Ils sont liés au cours intitulé : "Résolution des systèmes linéaires $Ax = b$ par des méthodes directes de Gauss et de Householder."

Correction exercice 1

Dans cette correction les références sont celles de l'énoncé.

1) Le seul cas intéressant est évidemment celui où le produit matriciel n'est pas commutatif. La fonction déterminant n'étant pas linéaire est inutilisable. Essayons la fonction trace. Par la relation (5) on a $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA)$. La relation (3) implique alors que $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$. Comme $\mathrm{tr}(\lambda I) = n\lambda$, la relation $AB - BA = \lambda I$ est impossible si λ est un scalaire non nul.

2) Si $AB + BA = 0$, on a $AB = -BA$ et la relation (4) implique alors que $\det(AB) = (-1)^n \det(BA)$. La relation (2) implique que cette relation est possible seulement si n est pair.

Correction exercice 2

a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

supposée inversible et donc de déterminant non nul, c'est-à-dire que $ac - b^2 \neq 0$. Calculons son inverse par la méthode de Gauss, sans stratégie de pivot, vue au cours et dont nous empruntons les notations. Comme $a \neq 0$, multiplions M par la matrice

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$E^{(1)} M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

d'où

$$M = (E^{(1)})^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

soit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix}^{-1} E^{(1)} = U^{-1} E^{(1)}$$

avec une définition évidente de la matrice U. La matrice U étant triangulaire supérieure est très facile à inverser. On trouve, sachant que $ac - b^2 \neq 0$:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix},$$

donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On a trivialement
$$MM^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} ac-b^2 & 0 \\ 0 & -b^2+ac \end{pmatrix} = I,$$
donc $\det(M^{-1}) = 1/\det(M) = 1/(ac-b^2)$.

Soit maintenant (1), comme on a $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ pour tout scalaire α si A est une matrice d'ordre n, il vient :
$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{(ac-b^2)^2}\det\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{(ac-b^2)^2}(ac-b^2) = \frac{1}{(ac-b^2)},$$
on retrouve le résultat précédent.

b) On a
$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BSB^TA^{-1} & -A^{-1}BS \\ -SB^TA^{-1} & S \end{pmatrix},$$
soit
$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} I+BSB^TA^{-1}-BSB^TA^{-1} & -BS+BS \\ B^TA^{-1}+B^TA^{-1}BSB^TA^{-1}-CSB^TA^{-1} & -B^TA^{-1}BS+CS \end{pmatrix}.$$
Le bloc supérieur gauche est évidemment la matrice identité. Le bloc inférieur droit s'écrit $(-B^TA^{-1}B+C)S$. Par la définition de S on a $S^{-1} = C-B^TA^{-1}B$, et on constate que le facteur de la matrice S dans $(-B^TA^{-1}B+C)S$ est S^{-1}. Le bloc inférieur droit est donc l'identité. Le bloc supérieur droit est évidemment la matrice nulle. Reste à considérer le bloc inférieur gauche qui s'écrit :
$$B^TA^{-1}+B^TA^{-1}BSB^TA^{-1}-CSB^TA^{-1} = (I+B^TA^{-1}BS-CS)B^TA^{-1}. \quad (2)$$

D'après l'expression de S^{-1} on a $(C-B^TA^{-1}B)S = I$, soit $CS-B^TA^{-1}BS = I$ ou $I-CS+B^TA^{-1}BS = 0$. Par l'équation (2), le bloc inférieur gauche est donc une matrice nulle. On a donc finalement $NN^{-1} = I$.

On démontre de même que $N^{-1}N = I$. $\square$

c) Considérons des scalaires a, b et c à la place (respectivement) des matrices-blocs A, B et C de la matrice N. La matrice N est alors la matrice M du a). Alors on a $A^{-1} = \frac{1}{a}$ et $S = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{ac-b^2}$. Traduisons tous les termes de la matrice N^{-1}.

i) $A^{-1}+A^{-1}BSB^TA^{-1} = \frac{1}{a}+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{c}{ac-b^2}$,

ii) $-A^{-1}BS = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{-b}{ac-b^2}$,

iii) $-SB^TA^{-1} = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{-b}{ac-b^2}$,

iv) $S = \frac{a}{ac-b^2}$.

Finalement $N^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$, on retrouve l'expression (1) de M^{-1}.

d) Soient les matrices diagonales de N^{-1} qui sont carrées. La matrice $\mathcal{M}$ est symétrique. En effet soit $\mathcal{M}^T = C^T - B^T(A^{-1})^TB$, comme A est symétrique la matrice $(A^{-1})^T$ est symétrique, comme C est aussi symétrique on a donc $\mathcal{M}^T = C-B^TA^{-1}B = \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est symétrique, son inverse S l'est donc aussi. Soit la matrice $\mathcal{N} = A^{-1}+A^{-1}BSB^TA^{-1}$. Grâce à la symétrie de A^{-1} et S, il vient : $\mathcal{N}^T = (A^{-1})^T + (A^{-1})^T(B^T)^TS^TB^T(A^{-1})^T =$

$A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} = \mathcal{N}$. Les deux blocs diagonaux carrés sont donc symétriques. Considérons maintenant les matrices blocs non-diagonaux de N^{-1} qui sont rectangulaires si B est rectangulaire. Regardons le bloc supérieur droit en prenant son symétrique. Puisque A^{-1} et S sont symétriques on a : $(-A^{-1}BS)^T = -S^TB^T(A^{-1})^T = -SB^TA^{-1}$ qui est le bloc inférieur gauche. Les blocs non-diagonaux sont donc transposés l'un de l'autre. La matrice N^{-1} est donc symétrique. $\square$

Correction exercice 3

a) Les valeurs propres de la matrice A sont toutes strictement positives car A est symétrique définie positive (voir cours). Comme le déterminant de A est le produit de toutes les valeurs propres (voir cours), ce déterminant est non nul et la matrice A est régulière.

b) Pour un vecteur $w = (w_i)_{1\leq i\leq k}$ quelconque non nul, considérons le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dont les k premières composantes sont celles de w et les $(n-k)$ dernières composantes sont nulles. On a

$$(\Delta_k w, w) = (Av, v),$$

car $(Av, v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_jv_i = \sum_{i,j=1}^k a_{ij}w_jw_i = (\Delta_k w, w)$. Comme $(Av, v) > 0$ pour tout $v \neq 0$ on a $(\Delta_k w, w) > 0$ pour tout $w \neq 0$ et les sous-matrices Δ_k sont définies positives pour $1 \leq k \leq n$.

c) On reprend les notations du cours. On ne se place pas dans le cadre d'une stratégie de pivot. D'après le b) nécessairement $a_{11}^{(1)} > 0$, on le prend pour pivot et on peut prendre $P_1 = I$. Supposons qu'on ait pu choisir de proche en proche $P_1 = P_2 = \ldots = P_{k-1} = I$ et que les pivots $a_{i,i}^{(i)}$ soient tous strictement positifs de sorte que, à l'étape $k-1$, le processus de triangulation donne la figure 1 suivante

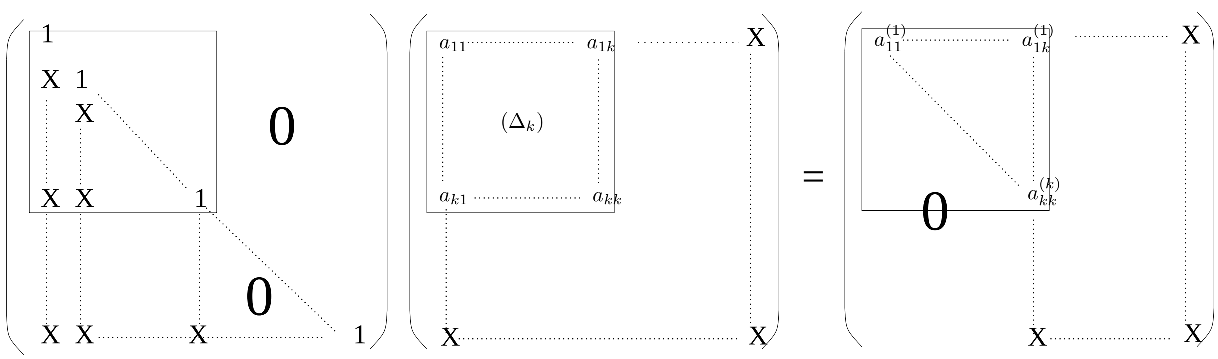

FIG. 1 –

En considérant les matrices blocs supérieures gauches on a

$$\det(\Delta_k) = a_{11}^{(1)} \ldots a_{kk}^{(k)}. \tag{3}$$

Comme, d'après le b), $\det(\Delta_k) > 0$ et $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq (k-1)$ par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ et l'on peut prendre $P_k = I$. Ce qui conclut la récurrence. On a donc une décomposition $A = LU$ où les $a_{ii}^{(i)} > 0$, $1 \leq i \leq n$, sont les éléments u_i de la matrice U.

d) Comme $u_{ii} > 0$, les racines carrées de ces nombres ont un sens. On vérifie, puisque la matrice L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale (c'est le résultat de la décomposition $A = LU$ obtenue par la méthode de Gauss : voir cours), que la matrice $B = L\Lambda$ est triangulaire inférieure et s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \cdots & & 0 \\ X & \sqrt{u_{22}} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ X & & & X & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

D'autre part la matrice $C = \Lambda^{-1}U$ est triangulaire supérieure et s'écrit :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_{11}}} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{u_{22}}} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & X & \cdots & & X \\ 0 & u_{22} & X & & X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & 0 & & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

soit

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & X & & \cdots & X \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & X & & X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & 0 & & 0 & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

où les croix dans ces matrices désignent des termes non nuls qu'il est inutile de préciser.

Comme A est symétrique, $A = A^T$, alors $BC = (BC)^T = C^T B^T$ et, puisque B est évidemment régulière, $C = B^{-1}C^T B^T$. Mais B^T est régulière car B est régulière (rappelons que B et B^T ont même déterminant). On peut le voir aussi en remarquant que la matrice B^T est triangulaire supérieure avec des termes $\sqrt{u_{ii}}$ sur sa diagonale principale, le déterminant de B^T est le produit de ces termes et il est donc non nul. Comme B^T est inversible on peut donc écrire

$$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T. \tag{7}$$

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. matrice triangulaire inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (resp. matrice triangulaire inférieure). En considérant la matrice $(B^T)^{-1}$ qui est triangulaire supérieure avec des termes $1/\sqrt{u_{ii}}$ sur la diagonale principale, on voit que la matrice $C(B^T)^{-1}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale principale.

On constate aussi que la matrice B^{-1} est triangulaire inférieure (car B est triangulaire inférieure) avec des termes $1/\sqrt{u_{ii}}$ sur la diagonale principale. Donc La matrice $C(B^T)^{-1}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale.

L'égalité matricielle (7) est donc vérifiée si nécessairement $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = I$ (I la matrice identité de $\mathcal{M}_n$).

e) D'après le d) comme $C(B^T)^{-1} = I$ on a $C = B^T$. Comme $A = LU = L\Lambda^{-1}\Lambda U = BC$ on a $A = BB^T$. Ce qui conclut.

f) À l'étape d), on pourraît prendre $\pm\sqrt{u_{ii}}$ comme éléments diagonaux de la matrice B. Ce qui offre 2^n choix possibles de décomposition de Choleski. Si on impose à B d'avoir des termes positifs la décomposition de Choleski $A = BB^T$ est unique. $\square$

Correction exercice 4

Remarquons d'emblée que si λ est une valeur propre nulle de AB alors $det(AB) = 0$; mais $det(AB) = det(A)det(B) = det(B)det(A) = det(BA)$ et si $det(AB) = 0$ alors $det(BA) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda = 0$ est aussi valeur propre de BA.

Soit $\mu \in \mathbb{C}$ un scalaire quelconque, considérons les produits des matrices-blocs suivantes d'ordre $2n$ (attention à l'ordre des facteurs), toutes les matrices constituantes étant des matrices d'ordre n.

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline 0 & \mu^2 I - BA \end{array}\right), \tag{8}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu^2 I - AB & 0 \\ \hline B & \mu I \end{array}\right). \tag{9}$$

Posons

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right), \tag{10}$$

et calculons les déterminants des matrices-blocs précédentes en remarquant, qu'à l'exception de la matrice C, les autres matrices sont blocs-triangulaires. Il vient en considérant les déterminants des matrices blocs-triangulaires dans les relations (8) et (9) :

$$\mu^n det(C) = \mu^n det(\mu^2 I - BA),$$

et

$$\mu^n det(C) = \mu^n det(\mu^2 I - AB).$$

soit $det(\mu^2 I - BA) = det(\mu^2 I - AB)$ si $\mu \neq 0$. En posant $\mu^2 = \lambda$ on a $det(\lambda I - BA) = det(\lambda I - AB)$, les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres λ non nulles.

Correction exercice 5

On vérifie par récurrence la formule (9) de l'énoncé en développant le déterminant δ_k par rapport à la dernière ligne de la matrice Δ_k. On a :

$$\delta_k = b_k \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{k-2} & b_{k-2} & c_{k-2} \\ & & & & a_{k-1} & b_{k-1} \end{vmatrix} - \dots \tag{11}$$

$$\dots - a_k \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{k-2} & b_{k-2} & 0 \\ & & & & a_{k-1} & c_{k-1} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

En développant le deuxième déterminant par rapport à sa dernière colonne il vient donc

$$\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2},$$

ce qui est la formule (9) de l'énoncé. Les valeurs de δ_0 et δ_1 sont évidentes pour faire démarrer la récurrence à l'ordre 2.

Pour la matrice A_1, les b_i (resp. c_i et a_i) sont tous égaux à 2 (resp. -1). Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 2$.

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 4 - 1 = 3$ puis $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.3 - 2 = 4$. Supposons donc que $\delta_i = i + 1$ pour $i \leq k - 1$, on a $\delta_k = 2k - (k - 1) = k + 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, donc $\delta(A_1) = \delta_n = n + 1$.

Pour la matrice A_2, on voit que les b_i sont tous égaux à 2 à l'exception de $b_1 = 1$ et que les c_i et a_i sont tous égaux à -1. Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 1$.

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 2 - 1 = 1$ puis $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.1 - 1 = 1$. Supposons donc que $\delta_i = 1$ pour $i \leq k - 1$, on a $\delta_k = 2.1 - 1 = 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$, donc $\delta(A_2) = \delta_n = 1$.

Pour la matrice A_3, on voit que les b_i sont tous égaux à 2 à l'exception de $b_1 = 1$ et $b_n = 1$, et que les c_i et a_i sont encore tous égaux à -1. Tenu compte des formules (7) de l'énoncé, calculons par récurrence les $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ jusqu'à $k = (n - 1)$ en partant de $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = b_1 = 1$. Ensuite pour $k = n$, puisque $b_n = 1$ et $a_n = c_{n-1} = -1$, il faudra estimer $\delta_n = \delta_{n-1} - \delta_{n-2}$

On a $\delta_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 2 - 1 = 1$ et $\delta_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2.1 - 1 = 1$. Supposons donc que $\delta_i = 1$ pour $i \leq k - 1$, on a immédiatement $\delta_k = 2.1 - 1 = 1$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq (n - 1)$. Finalement pour $k = n$, on a $\delta_n = \delta_{n-1} - \delta_{n-2} = 1 - 1 = 0$. La matrice A_3 est singulière.

Correction exercice 6

i) Soit une matrice A triangulaire supérieure inversible d'ordre n. Considérons le produit de A par son inverse B, on a $AB = I$ avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ soit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Comme la matrice A triangulaire supérieure est inversible par hypothèse son déterminant non nul est égal au produit des éléments diagonaux et donc $a_{i,i} \neq 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

Commençons par identifier les termes de la dernière ligne du produit AB. Puisque la matrice A est triangulaire supérieure, pour le terme $(AB)_{n,1}$, on a $(AB)_{n,1} = a_{n,n}b_{n,1} = 0$ soit $b_{n,1} = 0$ car $a_{n,n} \neq 0$. De même, en considérant $(AB)_{n,k}$ pour $2 \leq k \leq (n - 1)$, on voit que $(AB)_{n,k} = a_{n,n}b_{n,k} = 0$ d'où $b_{n,k} = 0$. Enfin on a $(AB)_{n,n} = a_{n,n}b_{n,n} = 1$ soit $b_{n,n} \neq 0$. Le seul terme non nul de la dernière ligne de B est $b_{n,n}$.

Considérons ensuite l'avant-dernière ligne du produit AB. On a $(AB)_{n-1,1} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} + a_{n-1,n}b_{n,1} = 0$ avec, on vient de le voir, $b_{n,1} = 0$. Comme $a_{n-1,n-1} \neq 0$ on a donc $b_{n-1,1} = 0$. De même tous les termes de la $(n-1)^e$ ligne du produit AB sont nuls jusqu'à la $(n-2)^e$ colonne. Calculons $(AB)_{n-1,n-1} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} + a_{n-1,n}b_{n,n-1} = 1$ avec $b_{n,n-1} = 0$, on a donc $b_{n-1,n-1} \neq 0$. Enfin le dernier terme de cette ligne est $(AB)_{n-1,n} = a_{n-1,n-1}b_{n-1,n} + a_{n-1,n}b_{n,n} = 0$, mais il ne décide en rien de la structure de B. De proche en proche , par une récurrence montante, la structure triangulaire supérieure de B apparaît. Observons pour terminer le terme $(AB)_{2,1}$. On a $(AB)_{2,1} = a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b3,1 + \cdots + a_{2,n}b_{n,1} = 0$, or on sait maintenant que $b_{i,1} = 0$ pour $3 \leq i \leq n$, donc $(AB)_{2,1} = a_{2,2}b_{2,1}$ avec $(AB)_{2,1} = 0$ et $a_{2,2} \neq 0$, donc $b_{2,1} = 0$. La matrice B est bien triangulaire supérieure.

Remarque : La démonstration montre que $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$. □

ii) Comme la matrice A triangulaire inférieure est inversible par hypothèse son déterminant non nul est égal au produit des éléments diagonaux et donc $a_{i,i} \neq 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Considérons la matrice B telle que $BA = I$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

On pourrait faire un raisonnement semblable au i), mais cette fois-ci en faisant une identification, par une récurrence descendante, en commençant par la première ligne du produit matriciel BA. Il est plus astucieux de prendre les transposées des deux membres de l'équation $BA = I$. On a $(BA)^T = A^T B^T = I$, A^T est triangulaire supérieure puisque A est triangulaire inférieure. On est ramené au cas précédent. La matrice B^T est donc triangulaire supérieure, ce qui entraîne que B est triangulaire inférieure. Ce qui conclut.

Remarque : D'après la remarque précédente $b_{i,i} = 1/a_{i,i}$. Cela implique que si la matrice triangulaire inférieure est de type "Gauss", avec des "1" sur la diagonale principale, son inverse aura aussi des "1" sur sa diagonale principale. □

iii) C'est un simple produit de matrices. Notons $(L_1)_{i,j}$ (resp. $(L_2)_{i,j}$) les éléments de L_1 (resp. L_2). Calculons la première colonne du produit. On a, $(L_1L_2)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n}(L_1)_{i,k}(L_2)_{k,1}$ comme tous les éléments de la i^e ligne de L_1 sont nuls à l'exception de $(L_1)_{i,1}$ et de $(L_1)_{i,i} = 1$, on a $(L_1L_2)_{i,1} = (L_1)_{i,1}.1 + 1.0 = (L_1)_{i,1}$. Calculons la deuxième colonne : $(L_1L_2)_{i,2} = \sum_{k=1}^{n}(L_1)_{i,k}(L_2)_{k,2}$, le seul élément non nul de la somme est $1.(L_2)_{i,2}$ donc $(L_1L_2)_{i,2} = (L_2)_{i,2}$. Les $(n-2)$ dernières colonnes du produit sont celles de L_2 (ou de L_1).

Enfin soit le produit L_2L_1, en calculant la première colonne de ce produit on voit que $(L_2L_1)_{2,1} = (L_2)_{2,1}$ puis $(L_2L_1)_{i,1} = (L_2)_{i,2}(L_1)_{2,1} + (L_1)_{i,1}$. La première colonne est une combinaison de termes de L_1 et L_2. Les autres colonnes du produit sont identiques à celles de L_2.

Correction exercice 7

i) Soit P la matrice $I + vw^T$. On suppose $v \neq 0$, sinon $vw^T = 0$ et $det(I + vw^T) = det(I) = 1$, le résultat est alors évident.

Soit x un vecteur propre de P associé à une valeur propre λ. Supposons d'abord que x n'est pas orthogonal à w, on a

$$(I + vw^T)x = \lambda x,$$

soit

$$vw^T x = (\lambda - 1)x, \tag{15}$$

ou encore, en posant $\mu = w^T x$ (un produit scalaire de vecteurs est évidemment un scalaire),

$$\mu v = (\lambda - 1)x,$$

et donc x est un multiple de v. Si $x = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (15) implique $v(w^T v) = (\lambda - 1)v$ soit

$$v(1 + w^T v) = \lambda v. \tag{16}$$

Comme le vecteur propre x est un multiple du vecteur v, le sous-espace propre est de dimension un, sa valeur propre associée a une multiplicité géomètrique et algébrique égale à un et (16) montre qu'elle vaut $1 + w^T v = 1 + (v, w)$.

Sinon, si x est orthogonal à w, la relation (15) entraîne que $\lambda = 1$. Comme le sous-espace orthogonal à w est un sous-espace de dimension $(n-1)$, la valeur propre "I" est de multiplicité $(n-1)$. Comme $det(P) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(P)$, on a

$$det(P) = 1 + (v, w). \tag{17}$$

ii) La matrice A étant régulière, on peut écrire $(A+uv^T) = A(I+A^{-1}uv^T)$. Comme le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, on a $det(A + uv^T) = det(A)det(I + A^{-1}uv^T)$. Donc, comme la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $det(A + uv^T) \neq 0$, $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $det(I + A^{-1}uv^T) \neq 0$. Or, d'après (17), $det(I + A^{-1}uv^T) = 1 + (v, A^{-1}u)$. Ce qui conclut : la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + (v, A^{-1}u) \neq 0$.

iii) Comme la matrice $(A+uv^T)$ est régulière on a $\sigma \neq 0$ et on peut considérer la matrice $A^{-1}-(1/\sigma)A^{-1}uv^T A^{-1}$. Vérifions qu'elle est l'inverse de $(A + uv^T)$ en calculant le produit de $A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^T A^{-1}$ par $(A + uv^T)$. On a

$$E = (A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^T A^{-1})(A + uv^T),$$

soit en développant

$$E = I - (1/\sigma)A^{-1}uv^T + A^{-1}uv^T - (1/\sigma)A^{-1}u(v^T A^{-1}u)v^T. \tag{18}$$

Par la définition de σ, on a $v^T A^{-1}u = \sigma - 1$, en portant cette expression dans (18) on constate que $E = I$. Ce qui conclut. $\square$